

STERA_FEM

技術マニュアル
有限要素法の基礎理論

Version 2.0

斉藤 大樹
豊橋技術科学大学

更新履歴

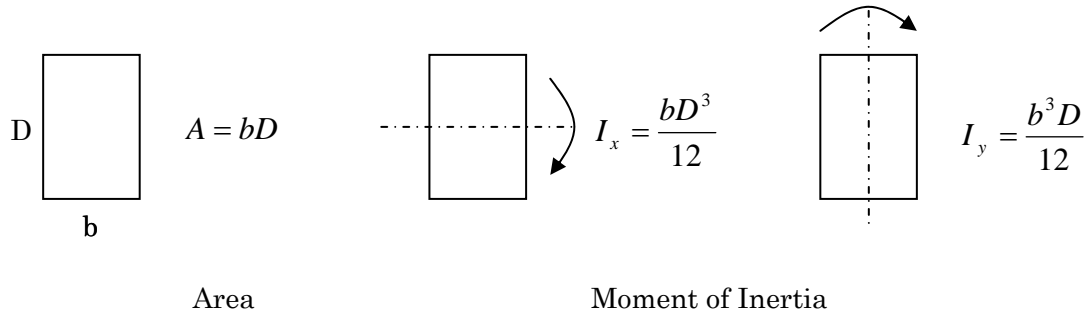
2013/11/11 STERA_FEM 技術マニュアル Ver.1.1 をアップロードしました。
2013/12/11 STERA_FEM 技術マニュアル Ver.1.2 をアップロードしました。
2014/11/16 STERA_FEM 技術マニュアル Ver.1.3 をアップロードしました。
2016/06/14 STERA_FEM 技術マニュアル Ver.2.0 をアップロードしました。

第 1 章

彈性理論

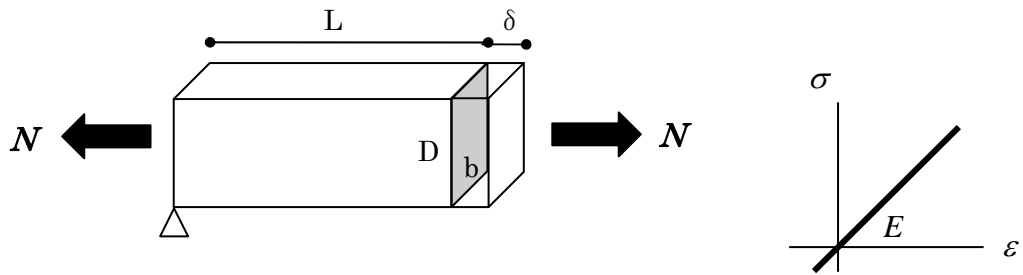
1. はじめに

1-1. 断面



1-2. 応力と歪

1) 1次元問題



$$\sigma = \frac{N}{A}$$

応力

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

歪

$$\sigma = E\varepsilon$$

フックの法則

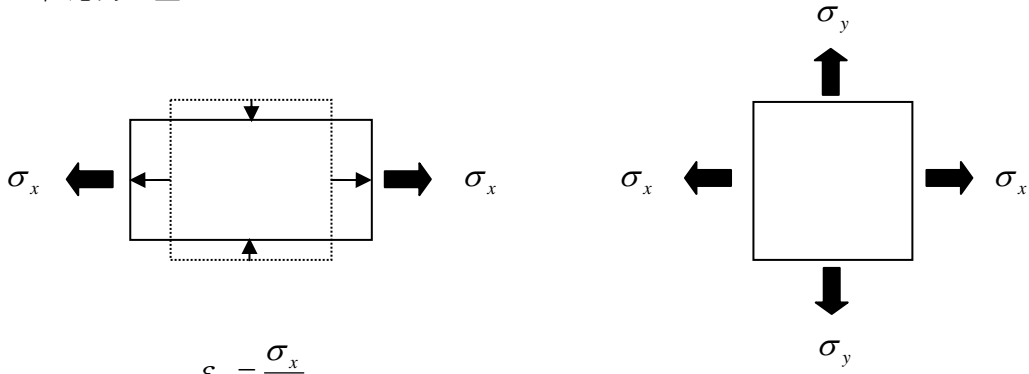
E : ヤング係数 (縦弾性係数ともいう)

$$N = \frac{EA}{L} \delta$$

力・変位関係

2) 2次元問題

垂直応力と歪



$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

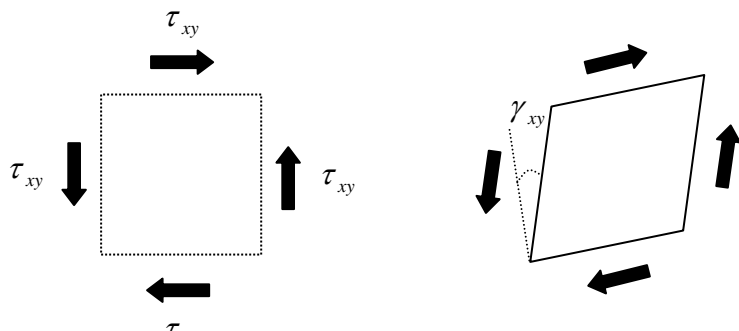
$$\varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

ν : ポアソン比

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E}$$

せん断応力と歪

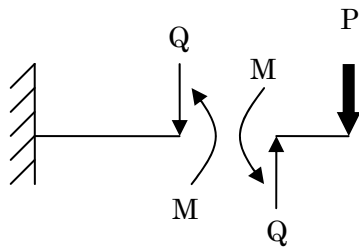


$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$G = \frac{1}{2(1+\nu)}E : \text{せん断剛性係数 (剛性率、横弾性係数ともいう)}$$

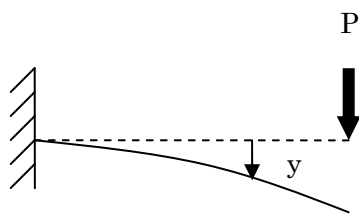
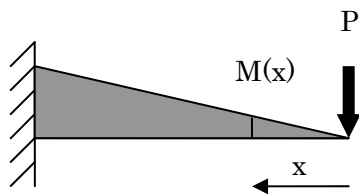
$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\nu \frac{1}{E} & 0 \\ -\nu \frac{1}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

1-3. はりのたわみ (弾性曲線法)



Q : Shear Force

M : Moment



$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{EI} M(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x)$$

Example)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{EI} M(x), \quad M(x) = Px$$

$$\rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{EI} x$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{P}{EI} x^2 + c_1$$

$$\rightarrow y = \frac{1}{6} \frac{P}{EI} x^3 + c_1 x + c_2$$

at $x = L$, $\frac{dy}{dx} = 0$ and $y = 0$:

Therefore,

$$c_1 = -\frac{PL^2}{2EI}, \quad c_2 = \frac{1}{3} \frac{PL^3}{EI}$$

$$y = \frac{1}{6} \frac{P}{EI} x^3 - \frac{1}{2} \frac{PL^2}{EI} x + \frac{1}{3} \frac{PL^3}{EI}$$

1-4. 鉄筋コンクリートの材料特性

単位重量

コンクリート種別	設計規準強度 ($\text{N/mm}^2 = \text{MPa}$)	単位重量 (kN/m^3)
普通コンクリート	$F_c \leq 36$	24

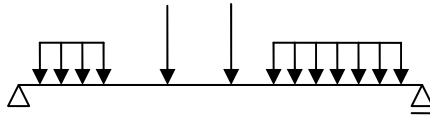
材料特性

	ヤング係数 ($\text{N/mm}^2 = \text{MPa}$)	ポアソン比	熱膨張係数 ($1/^\circ\text{C}$)
鉄筋	200 000	1/4	1×10^{-5}
コンクリート	22 000 ($F_c = 18$) 25 000 ($F_c = 24$) 28 000 ($F_c = 30$)	1/6	1×10^{-5}

2. FEMの解法手順（その1. 単純梁の変形）

Step.1: 問題の記述

様々な外力が作用する単純ばりの変形を考えてみよう。



外力の条件が変わったら、変形のパターンも変化する。すなわち、無限の変形パターンがありえる。（コンピュータは無限は扱えない！）



Step.2: 変形関数を仮定

変形パターンとして、特定の関数を仮定する。たとえば、

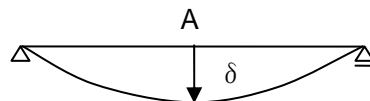
$$v(x) = a \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \quad (2-1)$$



Step.3: 節点の変位と部材の変形の関係

(2-1) 式から、中央の節点Aの変位 δ と未定係数 a の関係は、

$$\delta = v(0.5L) = a \quad (2-2)$$



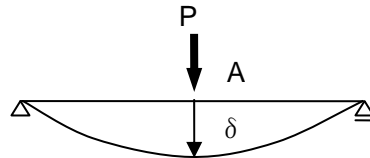
従って、節点の変位と部材の変形の関係は、

$$v(x) = \delta \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \quad (2-3)$$

Step.4: 節点の力と変位の関係（剛性方程式）

節点の力 P と節点の変位 δ の関係は、剛性を K とすると、次式で表される。
 なお、剛性 K の求め方は、ここでは省略する。

$$P = K\delta \quad (2-4)$$



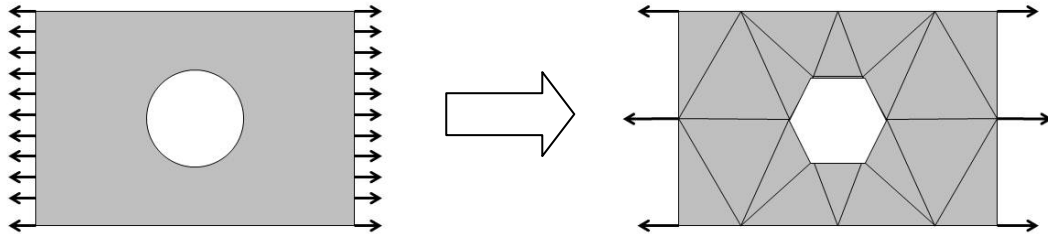
以上の手順をまとめると

<p>A diagram showing a beam with several point loads and a distributed load. An arrow points to a simplified beam with a single point load P at the center.</p>	複雑な外力を、節点の外力 P に近似する。
<p>A diagram showing a beam with a point load P at the center. The deflection at the center is labeled as δ.</p>	剛性方程式から、節点の変位 δ を求める。 $\delta = K^{-1}P$
<p>A diagram showing a beam with a point load P at the center. The deflection at the center is labeled as v.</p>	節点の変位から、部材の変形を求める。 $v(x) = \delta \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$

この単純な例は、有限要素解析のエッセンスを表している。すなわち、変形のパターンを仮定して、変形の自由度を無限から有限の数に減らし、要素の変形を節点の変位から求める。

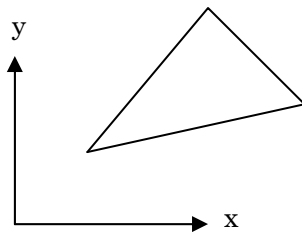
3. FEMの解法手順 (その2. 線形三角形要素)

2次元平面上の物体の力と変形を求めるのに、有限要素法では物体をいくつかの有限要素に分割してコンピュータで数値的に解析する。要素の形状としては、三角形がよく使われる。

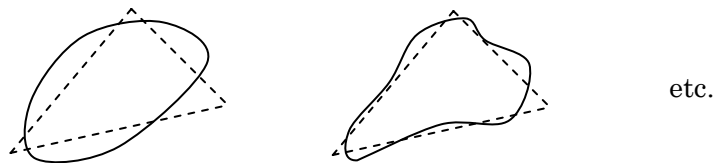


Step.1: 問題の記述

様々な外力が作用する三角形要素の変形を考えてみよう。



外力の条件が変わったら、変形のパターンも変化する。すなわち、無限の変形パターンがありえる。(コンピュータは無限は扱えない!)

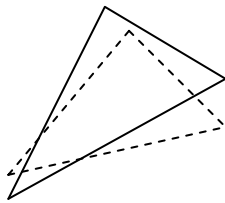


Step.2: 変形関数を仮定

変形パターンとして、特定の関数を仮定する。たとえば、座標 x, y に関する線形関数として変形を定義すると、

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v(x, y) &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \quad (3-1)$$

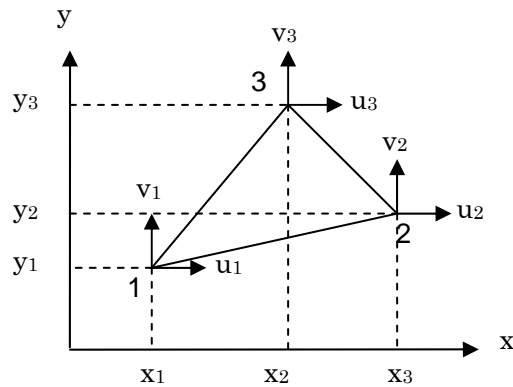
マトリクスで表すと



$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix} \quad (3-2)$$

Step.3: 節点の変位と部材の変形の関係

(3-2)式にそれぞれの節点の座標を代入すれば、節点の変位と未定係数の関係は、



$$\text{Node 1: } \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix} \quad (3-3)$$

$$\text{Node 2: } \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix} \quad (3-4)$$

$$\text{Node 3: } \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix} \quad (3-5)$$

マトリクスにまとめると

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix} \quad (3-6)$$

$$U = A \alpha$$

これより、未定係数 $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ は節点変位から次式で求められる。

$$\alpha = A^{-1} U \quad (3-7)$$

よって、(3-2)式に(3-7)式を代入すれば、節点の変位と要素の変形の関係は、

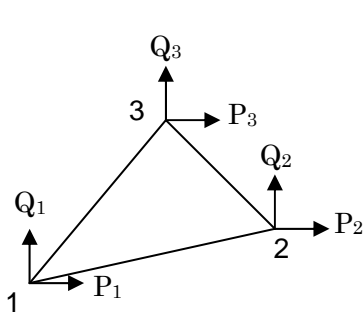
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (3-8)$$

$$u(x,y) = H(x,y) U$$

Step.4: 節点の力と変位の関係 (剛性方程式)

節点の力 P と節点の変位 δ の関係は、剛性を K とすると、次式で表される。

なお、剛性 K の求め方は、ここでは省略する。



$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (3-9)$$

$$F = KU$$

以上の手順をまとめると

- (1) 複雑な外力を、節点の外力に近似する。

$$\mathbf{F} = \{P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3\}^T$$

- (2) 剛性方程式から、節点の変位を求める。

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}$$

- (3) 節点の変位から、部材の変形を求める。

$$u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{U}$$

4. 三角形要素の剛性マトリクス

(13)式の剛性マトリクスは、次式の「仮想仕事法の原理」から求めることができる。

$$\int_V \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \boldsymbol{\sigma} dv = \bar{\boldsymbol{U}}^T \boldsymbol{F} \quad (4-1)$$

ここに、 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ は仮想歪ベクトル、 $\boldsymbol{\sigma}$ は応力、 $\bar{\boldsymbol{U}}$ は節点の仮想変位ベクトル、 \boldsymbol{F} は外力ベクトルである。この式は、「内力による仕事と外力による仕事が等しい」ことを表している。

平面問題の場合、歪ベクトルは次式で定義される。

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (4-2)$$

(3-8)式を(4-2)式に代入すれば、歪ベクトルは節点変位から次式で計算される。

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (4-3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{B} \boldsymbol{U}$$

平面問題における、応力・歪関係は次式で表される。

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (4-4)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D} \boldsymbol{\varepsilon}$$

(4-3)式を(4-4)式に代入すると、

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} \boldsymbol{U} \quad (4-5)$$

よって、仮想仕事の原理から

$$\int_V (B\bar{U})^T (DBU) dv = \bar{U}^T \left(\int_V B^T DB dv \right) U = \bar{U}^T F \quad (4-6)$$

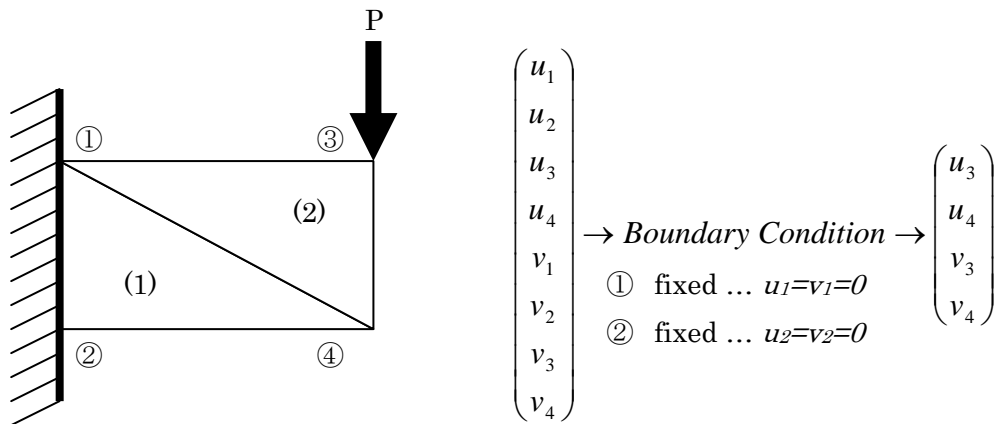
両辺から \bar{U}^T を除けば、剛性方程式が次式のように得られる。

$$F = KU, \quad K = \int_V B^T DB dv \quad (4-7)$$

5. 要素剛性マトリクスから全体剛性マトリクス

1) 力制御の場合

境界条件を考慮し、全節点の自由度から拘束自由度を除いた自由度（構造物の解析自由度）を求める。



要素剛性マトリクスのサイズは 6×6

$$\text{Element (1) ...} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_4 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & k_{14}^{(1)} & k_{15}^{(1)} & k_{16}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & k_{24}^{(1)} & k_{25}^{(1)} & k_{26}^{(1)} \\ k_{31}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & k_{33}^{(1)} & k_{34}^{(1)} & k_{35}^{(1)} & k_{36}^{(1)} \\ k_{41}^{(1)} & k_{42}^{(1)} & k_{43}^{(1)} & k_{44}^{(1)} & k_{45}^{(1)} & k_{46}^{(1)} \\ k_{51}^{(1)} & k_{52}^{(1)} & k_{53}^{(1)} & k_{54}^{(1)} & k_{55}^{(1)} & k_{56}^{(1)} \\ k_{61}^{(1)} & k_{62}^{(1)} & k_{63}^{(1)} & k_{64}^{(1)} & k_{65}^{(1)} & k_{66}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_4 \end{pmatrix} \quad (5-1)$$

$$\text{Element (2) ...} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_3 \\ P_4 \\ Q_1 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & k_{13}^{(2)} & k_{14}^{(2)} & k_{15}^{(2)} & k_{16}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} & k_{24}^{(2)} & k_{25}^{(2)} & k_{26}^{(2)} \\ k_{31}^{(2)} & k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} & k_{34}^{(2)} & k_{35}^{(2)} & k_{36}^{(2)} \\ k_{41}^{(2)} & k_{42}^{(2)} & k_{43}^{(2)} & k_{44}^{(2)} & k_{45}^{(2)} & k_{46}^{(2)} \\ k_{51}^{(2)} & k_{52}^{(2)} & k_{53}^{(2)} & k_{54}^{(2)} & k_{55}^{(2)} & k_{56}^{(2)} \\ k_{61}^{(2)} & k_{62}^{(2)} & k_{63}^{(2)} & k_{64}^{(2)} & k_{65}^{(2)} & k_{66}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \quad (5-2)$$

解析自由度に対応する要素を足し合わせることで、全体剛性マトリクスが求められる。

$$\begin{pmatrix} P_3 \\ P_4 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} & k_{25}^{(2)} & k_{26}^{(2)} \\ k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(1)} + k_{33}^{(2)} & k_{35}^{(2)} & k_{36}^{(2)} + k_{36}^{(2)} \\ k_{52}^{(2)} & k_{53}^{(2)} & k_{55}^{(2)} & k_{56}^{(2)} \\ k_{62}^{(2)} & k_{63}^{(1)} + k_{63}^{(2)} & k_{65}^{(2)} & k_{66}^{(1)} + k_{66}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \quad (5-3)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{U}$$

荷重制御の場合は、左辺に荷重条件を与えて

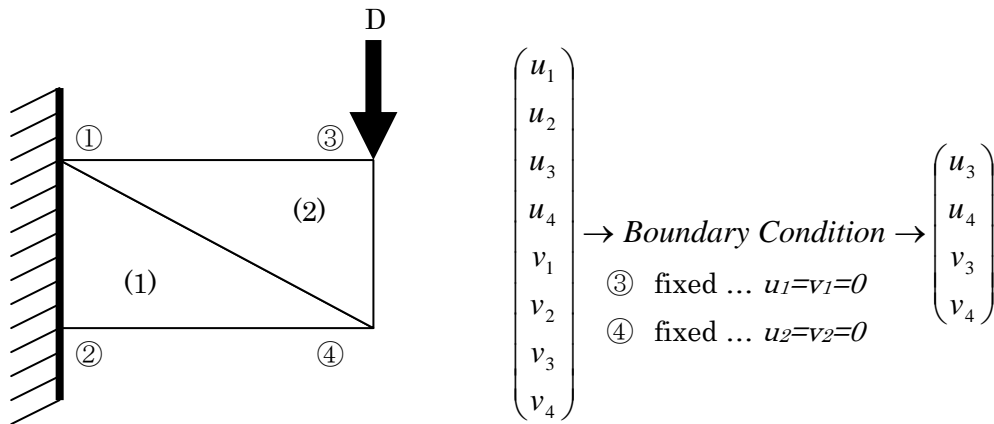
$$\begin{pmatrix} P_3 \\ P_4 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5-4)$$

構造物の変位は、構成方程式を解いて求めることができる。

$$\begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \mathbf{K}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5-5)$$

2) 変位制御の場合

境界条件を考慮し、全節点の自由度から拘束自由度を除いた自由度（構造物の解析自由度）を求める。



全体構成方程式において、強制変位 $v_3 = D$ を与えると

$$\begin{pmatrix} P_3 \\ P_4 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} & k_{25}^{(2)} & k_{26}^{(2)} \\ k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(1)} + k_{33}^{(2)} & k_{35}^{(2)} & k_{36}^{(2)} + k_{36}^{(2)} \\ k_{52}^{(2)} & k_{53}^{(2)} & k_{55}^{(2)} & k_{56}^{(2)} \\ k_{62}^{(2)} & k_{63}^{(1)} + k_{63}^{(2)} & k_{65}^{(2)} & k_{66}^{(1)} + k_{66}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \\ D \\ v_4 \end{pmatrix} \quad (5-6)$$

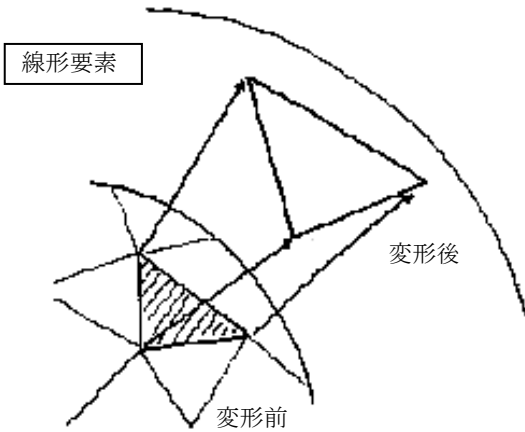
左辺の外力ベクトルはゼロなので、強制変位に対応する荷重を左辺に移動すれば、

$$\begin{pmatrix} -k_{25}^{(2)} D \\ -k_{35}^{(2)} D \\ -k_{65}^{(2)} D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} & k_{26}^{(2)} \\ k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(1)} + k_{33}^{(2)} & k_{36}^{(2)} + k_{36}^{(2)} \\ k_{62}^{(2)} & k_{63}^{(1)} + k_{63}^{(2)} & k_{66}^{(1)} + k_{66}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} \quad (5-7)$$

この式を解けば、他の変位が求められる。

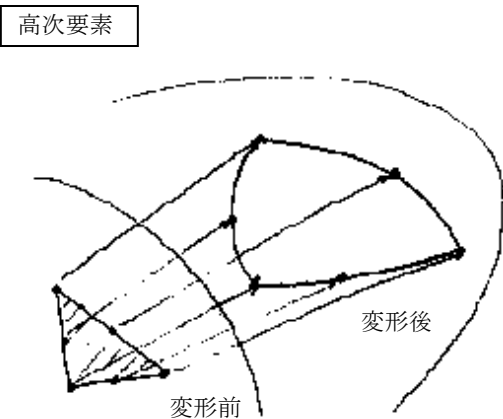
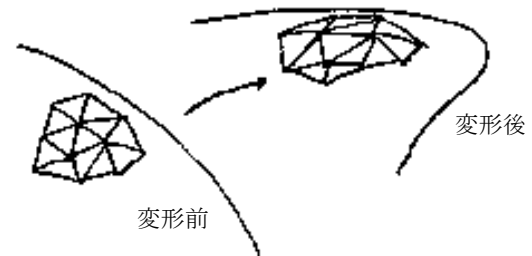
6. FEM の解法手順 (その 3. 高次要素)

Step.1: 問題の記述



線形三角形要素では、二つの節点の間の変形が直線（線形関数）で定義される。

そのため、物体の変形が大きいところでは、精度を高めるためには、沢山の三角形要素が必要である。要素の数が多ければ、それだけ計算時間がかかり、誤差も蓄積する。



要素の数を減らすために、高次要素を導入する。高次要素では、節点間の変形を座標 x, y の高次関数として定義するので、少ない要素で複雑な変形を表すことができる。

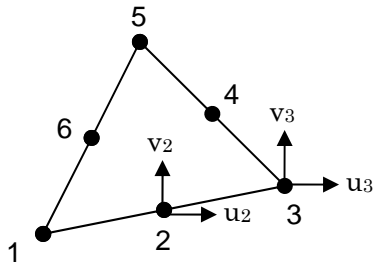
Step.2: 変形関数を仮定

たとえば、変形関数を 2 次関数とすると、

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 \\ v &= \alpha_7 + \alpha_8 x + \alpha_9 y + \alpha_{10} x^2 + \alpha_{11} xy + \alpha_{12} y^2 \end{aligned} \quad (6-1)$$

マトリクスで表すと

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_{12} \end{pmatrix} \quad (6-2)$$



2次関数を定義するには、最低3点の座標が必要なので、節点の中央に追加の節点を設ける必要がある。従って、1つの要素の節点の数は、6となる。

Step.3: 節点の変位と部材の変形の関係

(6-2)式にそれぞれの節点の座標を代入すれば、節点の変位と未定係数の関係は、

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_6 \\ - \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & | & & & & & & \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & | & & & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & & & & & & \\ 1 & x_6 & y_6 & x_6^2 & x_6 y_6 & y_6^2 & | & & & & & & \\ - & - & - & - & - & - & | & - & - & - & - & - & - \\ & & & & & & | & 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ & & & & & & | & 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 \\ & & & & & & | & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & & & | & 1 & x_6 & y_6 & x_6^2 & x_6 y_6 & y_6^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_6 \\ - \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \vdots \\ \alpha_{12} \end{pmatrix} \quad (6-3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha}$$

これより、未定係数 $\alpha_1, \dots, \alpha_{12}$ は節点変位から次式で求められる。

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{U} \quad (6-4)$$

よって、(6-2)式に(6-4)式を代入すれば、節点の変位と要素の変形の関係は、

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 \end{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_6 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_6 \end{pmatrix} \quad (6-5)$$

$$\mathbf{u}(x,y) = \mathbf{H}(x,y) \mathbf{U}$$

Step.4: 節点の力と変位の関係 (剛性方程式)

節点の力 \mathbf{P} と節点の変位 δ の関係は、剛性を \mathbf{K} とすると、次式で表される。

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_6 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_6 \end{pmatrix} = \mathbf{K} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_6 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_6 \end{pmatrix} \quad (6-6)$$
$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{U}$$

以上の手順をまとめると

- (1) 複雑な外力を、節点の外力に近似する。

$$\mathbf{F} = \{P_1, \dots, P_6, Q_1, \dots, Q_6\}^T$$

- (2) 剛性方程式から、節点の変位を求める。

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}$$

- (3) 節点の変位から、部材の変形を求める。

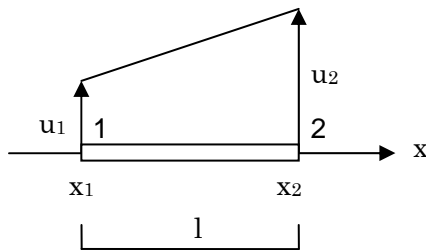
$$\mathbf{u}(x,y) = \mathbf{H}(x,y) \mathbf{U}$$

7. 補間関数

1次元の要素（梁のような要素）を考える。前述の手順に従うと、

Step 1: 変形関数を仮定

変形パターンとして、1次関数（線形関数）を仮定すると、要素の変形は、



$$u(x) = a_0 + a_1 x$$

すなわち

$$u(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad (7-1)$$

Step 2: 節点の変位と部材の変形の関係

(7-1)式にそれぞれの節点の座標を代入すれば、節点の変位と未定係数の関係は、

$$u_1 = a_0 + a_1 x_1$$

$$u_2 = a_0 + a_1 x_2$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad (7-2)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha}$$

これより、未定係数 α_0, α_1 は節点変位から次式で求められる。

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{U} \quad (7-3)$$

よって、節点の変位と要素の変形の関係は、

$$u(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \end{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (7-3)$$

$$u(x) = \mathbf{H}(x) \mathbf{U}$$

この方法の代わりに、補間関数を使って、要素の変位を節点変位から直接求めてみる。

$$u(x) = h_1(x)u_1 + h_2(x)u_2 \quad (7-4)$$

補間関数 h_1, h_2 , は以下のような性質を持っている。

$$h_1(x) = \begin{cases} 1, & x = u_1 \\ 0, & x \neq u_1 \end{cases}, \quad h_2(x) = \begin{cases} 1, & x = u_2 \\ 0, & x \neq u_2 \end{cases} \quad (7-5)$$

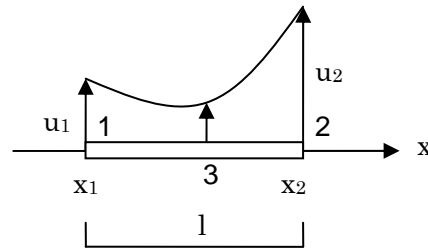
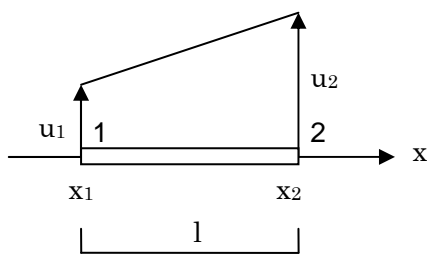
この性質から、補間関数は、容易に求められて

$$h_1(x) = \frac{x_2 - x}{l}, \quad h_2(x) = \frac{x - x_1}{l} \quad (7-6)$$

補間関数を使えば、(7-3)式に現れるマトリクス A の逆行列の計算が不要になる。

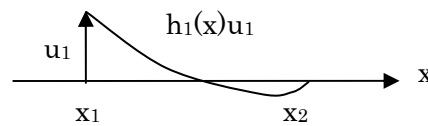
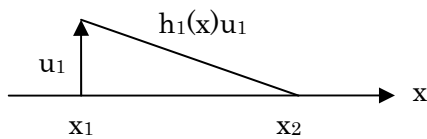
同じように、変形パターンに二次関数を仮定した場合にも、補間関数を使うことで、節点の変位から変位関数を次式のように表すことができる。

$$u(x) = h_1(x)u_1 + h_2(x)u_2 + h_3(x)u_3 \quad (7-7)$$



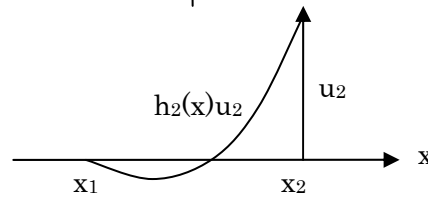
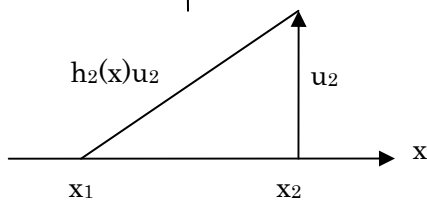
||

||

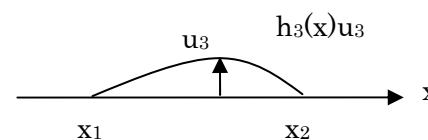


+

+

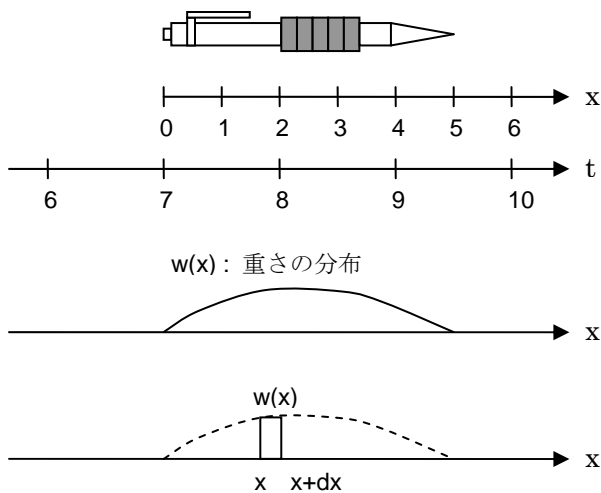


+



8. 自然座標系

1) 自然座標系



x という座標系では、ペンの長さは 5 でペンの先の座標も 5 だが、 t という別の座標系では、ペンの長さは 2.5 でペンの先の座標は 9.5 である。

これは、同じものを cm のものさしと inch のものさしで計ると値が異なるのと同じである。

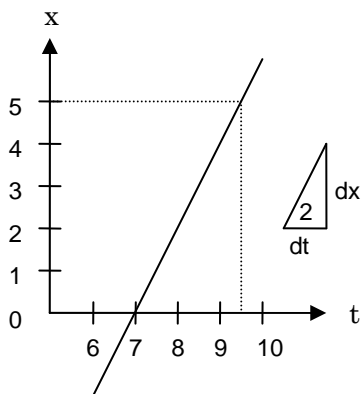
異なる座標系の間の一対一の対応があれば、片方の座標系の値から別の座標系の値に変換することができる。

$$\begin{array}{ccc} & t = 7 + 0.5x & \\ x & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & t \\ & x = 2(t - 7) & \end{array}$$

ペンの重さは、 x 座標系での重さの分布 $w(x)$ を積分して

$$W = \int_0^5 w(x) dx \quad (8-1)$$

t 座標系に変換するためには、以下の関係を利用する。



全体の関係式

$$x = 2(t - 7) \quad (8-2)$$

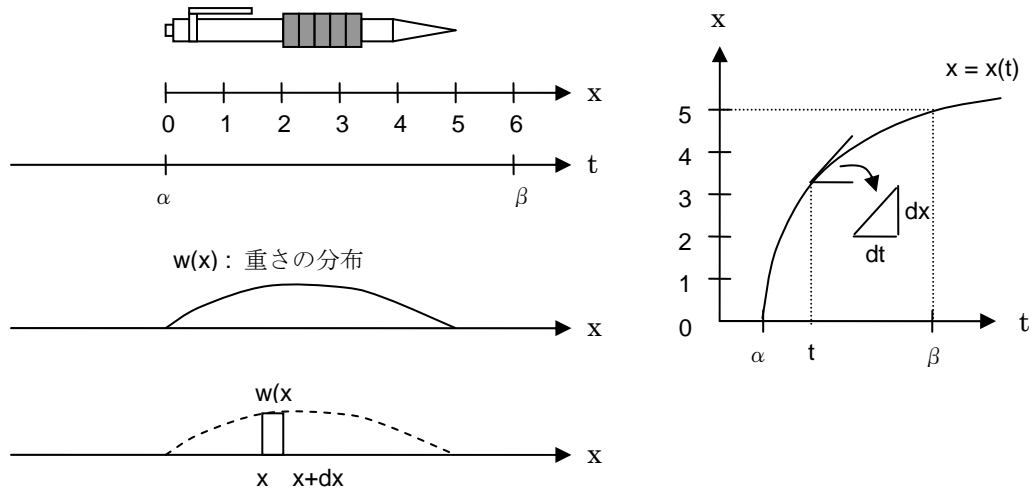
微小部分の関係式

$$dx = 2dt \quad (8-3)$$

これらの式を(8-1)式に代入すれば、 t 座標系におけるペンの重さを求める式が得られる。

$$W = 2 \int_{7.5}^{9.5} w(x(t)) dt \quad (8-4)$$

次に、もう少し複雑な座標系（ものさし）でペンの重さを計測してみる。



このとき、 x 座標系と t 座標系の関係は、

$$\text{全体の関係式:} \quad x = x(t) \quad (8-5)$$

$$\text{微小部分の関係式:} \quad dx = \frac{dx(t)}{dt} dt \quad (8-6)$$

ここに $dx(t)/dt$ は関数 $x(t)$ の t に関する一階微分で、座標 t における傾きを表している。これらの式を(8-1)式に代入すれば、 t 座標系におけるペンの重さを求める式が得られる。

$$W = \int_{\alpha}^{\beta} w(x(t)) \frac{dx(t)}{dt} dt \quad (8-7)$$

ここで、 $\alpha = -1$ 、 $\beta = 1$ となるように t 座標系を選ぶと、

$$W = \int_{-1}^1 f(t) dt, \quad f(t) = w(x(t)) \frac{dx(t)}{dt} \quad (8-8)$$

この座標系を“自然座標系”とよび、積分値の計算に以下に示すガウスの求積法を用いることができる。

2) ガウスの求積法

積分範囲が $[-1, 1]$ の積分値は、次式により近似的に計算できる。

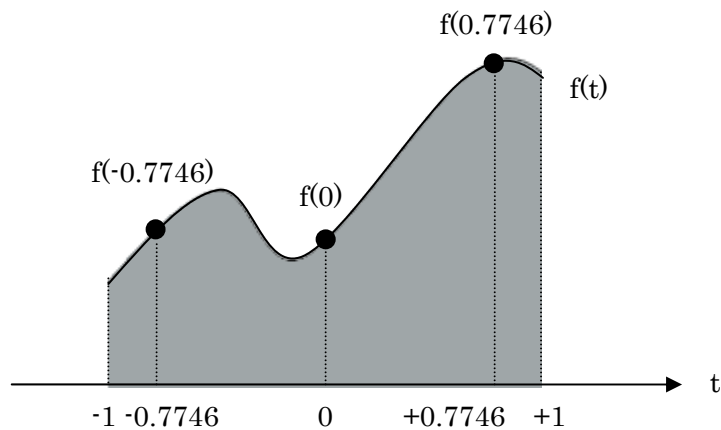
$$\int_{-1}^1 f(t) dt \approx \alpha_1 f(t_1) + \alpha_2 f(t_2) + \cdots + \alpha_n f(t_n) \quad (8-9)$$

ここに、 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ は重み係数である。この公式を使えば、サンプリング点 t_1, \dots, t_n における有限個の関数値 $f(t_1), \dots, f(t_n)$ から積分値を求めることができる。この方法を“ガウスの求積法”と呼ぶ。

たとえば、サンプリング点が3点の場合は、

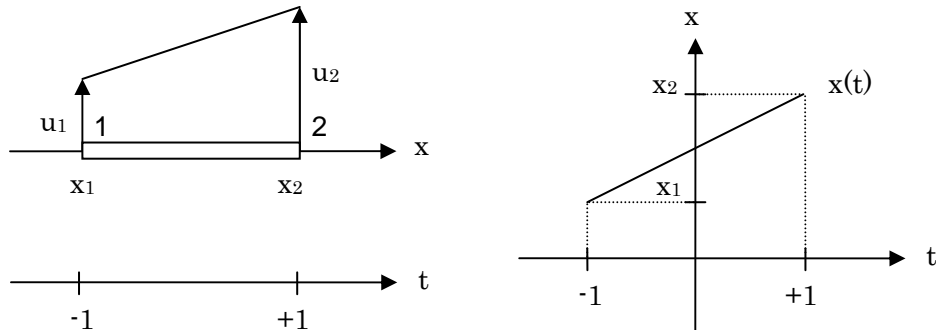
$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(t) dt &\approx 0.5556 f(-0.7746) + 0.8889 f(0) + 0.5556 f(0.7746) \\ &= \alpha_1 f(t_1) + \alpha_2 f(t_2) + \alpha_3 f(t_3) \end{aligned} \quad (8-10)$$

ここに、
 $\alpha_1 = 0.5556, \quad \alpha_2 = 0.8889, \quad \alpha_3 = 0.5556$
 $t_1 = -0.7746, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = 0.7746$



9. アイソパラメトリック要素

1次元要素について、自然座標系に変換してみよう。



x 座標系と t 座標系の変換関係 $x(t)$ を線形関数と仮定すれば、節点の座標値を用いて次式で表すことができる。

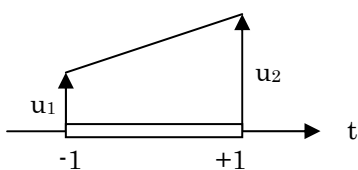
$$x(t) = h_1(t)x_1 + h_2(t)x_2 \quad (9-1)$$

ここに

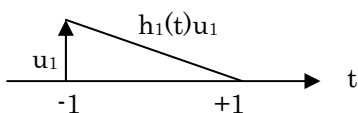
$$h_1(t) = \frac{1}{2}(1-t), \quad h_2(t) = \frac{1}{2}(1+t) \quad (9-2)$$

実際、以下の関係を満足している。

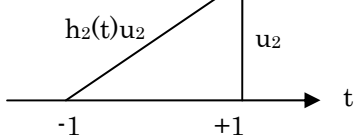
$$x(-1) = x_1, \quad x(1) = x_2 \quad (9-3)$$



||



+



要素の変形についても節点の変位を用いて次式で表すことができる。

$$u(t) = h_1(t)u_1 + h_2(t)u_2 \quad (9-4)$$

すなわち、関数 $h_1(t)$, $h_2(t)$ は補間関数に他ならない。

このように、座標変換の関数 $x(t)$ と要素変形の関数 $u(t)$ が同じ補間関数を用いて表すことができる要素を“アイソパラメトリック要素”とよぶ。

アイソパラメトリック要素を用いることで、以下のような利点がある。

- (1) 変形を補間関数によって $u(t) = \sum_{i=1}^n h_i(t)u_i$ と表すことで逆行列の計算が回避できる。
- (2) 座標を補間関数によって $x(t) = \sum_{i=1}^n h_i(t)x_i$ と変換することでガウスの求積法が使える。
- (3) 変形 $u(t)$ と座標変換 $x(t)$ の両方の関数を同じ補間関数で表すことができる。

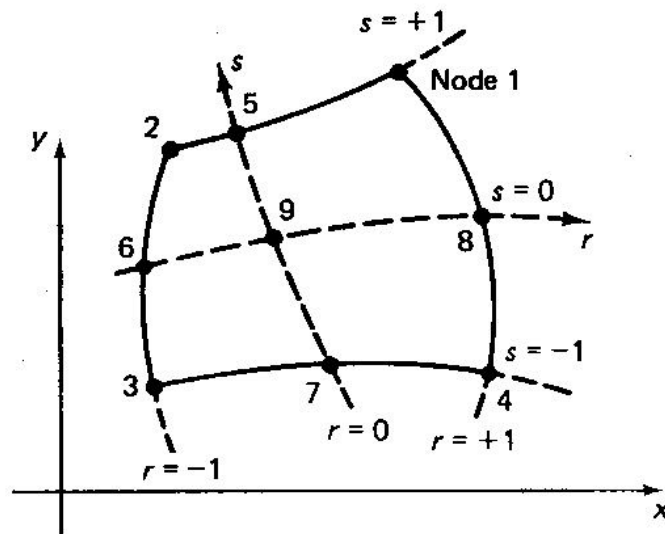
10. 補間関数の構成

(1) 1次元要素

2 Node	<p> $h_1 = \frac{1}{2}(1-r)$ $h_2 = \frac{1}{2}(1+r)$ </p>	$h_1 = \frac{1}{2}(1-r)$ $h_2 = \frac{1}{2}(1+r)$	
3 Node	<p> $h_1 = \frac{1}{2}(1-r) - \frac{1}{2}(1-r^2)$ $h_2 = \frac{1}{2}(1+r) - \frac{1}{2}(1-r^2)$ $h_3 = 1-r^2$ </p>	$h_1 = \frac{1}{2}(1-r)$ $h_2 = \frac{1}{2}(1+r)$	$-\frac{1}{2}(1-r^2)$ $-\frac{1}{2}(1-r^2)$
		$h_3 = 1-r^2$	

ここに示すように、節点を増やして補間関数の次数を増やす場合には、それまでの補間関数（上の例では h_1, h_2 ）を修正して、さらに新たな補間関数（上の例では h_3 ）を追加すればよい。

(2) 2次元要素



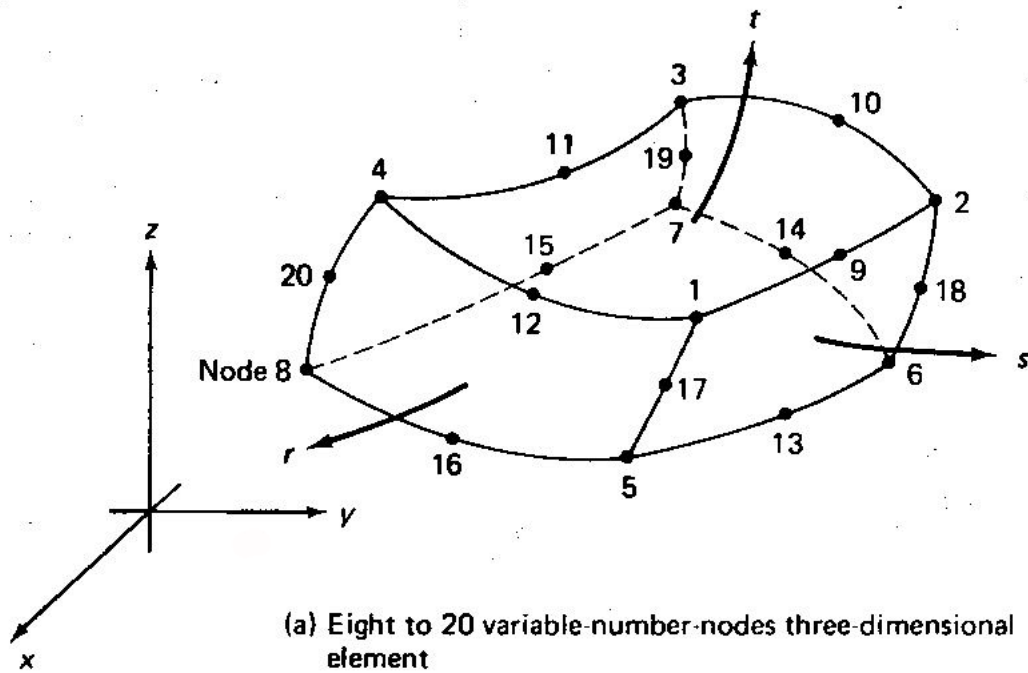
(a) Four to 9 variable-number-nodes two-dimensional element

Include only if node i is defined

	$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$	$i = 8$	$i = 9$
$h_1 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)$	$-\frac{1}{2}h_5$	$-\frac{1}{2}h_8$	$-\frac{1}{4}h_9$
$h_2 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s)$	$-\frac{1}{2}h_5$	$-\frac{1}{2}h_6$	$-\frac{1}{4}h_9$
$h_3 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s)$	$-\frac{1}{2}h_6$	$-\frac{1}{2}h_7$	$-\frac{1}{4}h_9$
$h_4 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s)$	$-\frac{1}{2}h_7$	$-\frac{1}{2}h_8$	$-\frac{1}{4}h_9$
$h_5 = \frac{1}{2}(1-r^2)(1+s)$	$-\frac{1}{2}h_9$
$h_6 = \frac{1}{2}(1-s^2)(1-r)$	$-\frac{1}{2}h_9$
$h_7 = \frac{1}{2}(1-r^2)(1-s)$	$-\frac{1}{2}h_9$
$h_8 = \frac{1}{2}(1-s^2)(1+r)$	$-\frac{1}{2}h_9$
$h_9 = (1-r^2)(1-s^2)$

(b) Interpolation functions

(3) 3次元要素



$$\begin{aligned}
 h_1 &= g_1 - (g_9 + g_{12} + g_{17})/2 & h_6 &= g_6 - (g_{13} + g_{14} + g_{18})/2 \\
 h_2 &= g_2 - (g_9 + g_{10} + g_{18})/2 & h_7 &= g_7 - (g_{14} + g_{15} + g_{19})/2 \\
 h_3 &= g_3 - (g_{10} + g_{11} + g_{19})/2 & h_8 &= g_8 - (g_{15} + g_{16} + g_{20})/2 \\
 h_4 &= g_4 - (g_{11} + g_{12} + g_{20})/2 & h_j &= g_j \text{ for } j = 9, \dots, 20 \\
 h_5 &= g_5 - (g_{13} + g_{16} + g_{17})/2
 \end{aligned}$$

$g_i = 0$ if node i is not included; otherwise,

$$g_i = G(r, r_i) G(s, s_i) G(t, t_i)$$

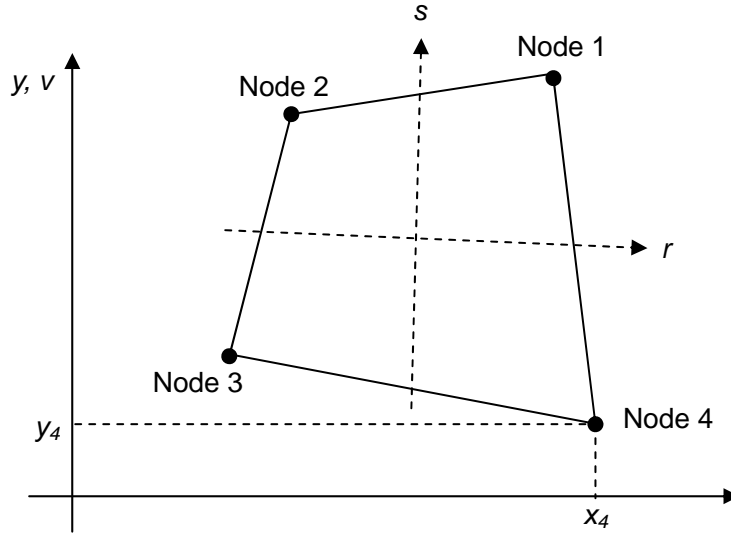
$$G(\beta, \beta_i) = \frac{1}{2}(1 + \beta_i \beta) \text{ for } \beta_i = \pm 1$$

$$G(\beta, \beta_i) = (1 - \beta^2) \text{ for } \beta_i = 0 \quad ; \beta = r, s, t$$

(b) Interpolation functions

11. アイソパラメトリック要素の剛性マトリクス

2次元4節点アイソパラメトリック要素について、剛性マトリクスを求めてみよう。



(x,y)座標から(r,s)座標への変換は、補間関数を用いて以下のように表される。

$$\begin{aligned} x(r, s) &= \sum_{i=1}^4 h_i(r, s)x_i = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)x_1 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)x_2 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)x_3 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)x_4 \\ y(r, s) &= \sum_{i=1}^4 h_i(r, s)y_i = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)y_1 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)y_2 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)y_3 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)y_4 \end{aligned} \quad (11-1)$$

部材の変形(u,v)と節点変形(u₁,v₁,...,u₄,v₄)の関係も、同じ補間関数を用いて以下のように表される。

$$\begin{aligned} u(r, s) &= \sum_{i=1}^4 h_i(r, s)u_i = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)u_1 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)u_2 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)u_3 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)u_4 \\ v(r, s) &= \sum_{i=1}^4 h_i(r, s)v_i = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)v_1 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)v_2 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)v_3 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)v_4 \end{aligned} \quad (11-2)$$

すでに述べたように、剛性マトリクスは次の仮想仕事の原理から求められる。

$$\int_V \bar{\varepsilon}^T \sigma \, dv = \bar{U}^T F \quad (11-3)$$

ここに、 $\bar{\varepsilon}$ は仮想歪ベクトル、 σ は応力ベクトル、 \bar{U} は節点の仮想変位ベクトル、 F は節点の荷重ベクトルである。

平面問題の場合、歪ベクトルと部材変形の関係は、

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (11-4)$$

(11-2) 式を (11-4) 式に代入すれば、歪ベクトルは節点変位ベクトルによって次のように表すことができる。

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial x} u_i \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial y} v_i \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial y} u_i + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial x} v_i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial y} \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial y} & \frac{\partial h_3}{\partial x} & \frac{\partial h_4}{\partial y} & \frac{\partial h_4}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{U} \quad (11-5)$$

また、平面問題における応力・歪関係は、

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (11-6)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}$$

この式に、式 (11-5) を代入すると、

$$\sigma = DBU \quad (11-7)$$

よって、(11-3)式の仮想仕事の原理より、

$$\int_V (B\bar{U})^T (DBU) dv = \bar{U}^T \left(\int_V B^T DB dv \right) U = \bar{U}^T F \quad (11-8)$$

従って、剛性マトリクスが以下のように得られる。

$$F = KU, \quad K = \int_V B^T DB dv \quad (11-9)$$

平面要素の厚さを一定値 (= t) と仮定すると、微小体積 $dv = t dx dy$ より、

$$K = t \int_{V(x,y)} B^T DB dx dy \quad (11-10)$$

この積分は、(x,y)座標系で定義されているため、積分範囲を(-1,1)にするために自然座標系である(r,s)座標系に変換する。

$$K = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B(x(r,s), y(r,s))^T DB(x(r,s), y(r,s)) \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)} dr ds \quad (11-11)$$

ここに

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)} = \det J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix} \quad (11-12)$$

ここに、 $\det J$ はヤコビアンといい、次のヤコブ行列 (Jacobian matrix) の行列式である。

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{pmatrix}; \text{ Jacobian Matrix} \quad (11-13)$$

1) ヤコブ行列の評価

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial r} x_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial r} y_i \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial s} x_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial s} y_i \end{pmatrix} \quad (11-14)$$

2) Bマトリクスの評価

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial y} \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial y} & \frac{\partial h_3}{\partial x} & \frac{\partial h_4}{\partial y} & \frac{\partial h_4}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (11-15)$$

補間関数の偏微分 $\frac{\partial h_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial h_4}{\partial x}, \frac{\partial h_1}{\partial y}, \dots, \frac{\partial h_4}{\partial y}$ は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial x} &= \frac{\partial h_1}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x}, \quad \dots, \quad \frac{\partial h_4}{\partial x} = \frac{\partial h_4}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial h_4}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x}, \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} &= \frac{\partial h_1}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial h_1}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y}, \quad \dots, \quad \frac{\partial h_4}{\partial y} = \frac{\partial h_4}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial h_4}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} \end{aligned}$$

マトリクスで書くと

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial x} & \frac{\partial h_4}{\partial x} \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_3}{\partial y} & \frac{\partial h_4}{\partial y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial r} & \frac{\partial h_2}{\partial r} & \frac{\partial h_3}{\partial r} & \frac{\partial h_4}{\partial r} \\ \frac{\partial h_1}{\partial s} & \frac{\partial h_2}{\partial s} & \frac{\partial h_3}{\partial s} & \frac{\partial h_4}{\partial s} \end{pmatrix} \\ &= J^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial r} & \frac{\partial h_2}{\partial r} & \frac{\partial h_3}{\partial r} & \frac{\partial h_4}{\partial r} \\ \frac{\partial h_1}{\partial s} & \frac{\partial h_2}{\partial s} & \frac{\partial h_3}{\partial s} & \frac{\partial h_4}{\partial s} \end{pmatrix} \quad (11-16) \end{aligned}$$

3) 補関数の偏微分

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h_1}{\partial r} &= \frac{1}{4}(1+s) & \frac{\partial h_1}{\partial s} &= \frac{1}{4}(1+r) \\
 \frac{\partial h_2}{\partial r} &= -\frac{1}{4}(1+s) & \frac{\partial h_2}{\partial s} &= \frac{1}{4}(1-r) \\
 \frac{\partial h_3}{\partial r} &= -\frac{1}{4}(1-s) & \frac{\partial h_3}{\partial s} &= -\frac{1}{4}(1-r) \\
 \frac{\partial h_4}{\partial r} &= \frac{1}{4}(1-s) & \frac{\partial h_4}{\partial s} &= -\frac{1}{4}(1+s)
 \end{aligned} \tag{11-17}$$

4) 数値積分の評価

剛性マトリクスは

$$K = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T DB (\det J) dr ds \tag{11-18}$$

ガウスの求積法より、積分はガウス積分点の値を用いた有限和によって評価される。

$$\begin{aligned}
 K &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B(x(r,s), y(r,s))^T CB(x(r,s), y(r,s)) \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)} dr ds \\
 &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(r,s) dr ds \\
 &= t \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \alpha_i \alpha_j F(r_i, s_j)
 \end{aligned} \tag{16-2}$$

ここに

$$\begin{aligned}
 F(r,s) &= B(x(r,s), y(r,s))^T CB(x(r,s), y(r,s)) \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)} \\
 \alpha_1 &= 0.5556, \quad \alpha_2 = 0.8889, \quad \alpha_3 = 0.5556 \\
 r_1 = s_1 &= -0.7746, \quad r_2 = s_2 = 0, \quad r_3 = s_3 = 0.7746
 \end{aligned}$$

補足) 積分変数変換におけるヤコビアンの意味について

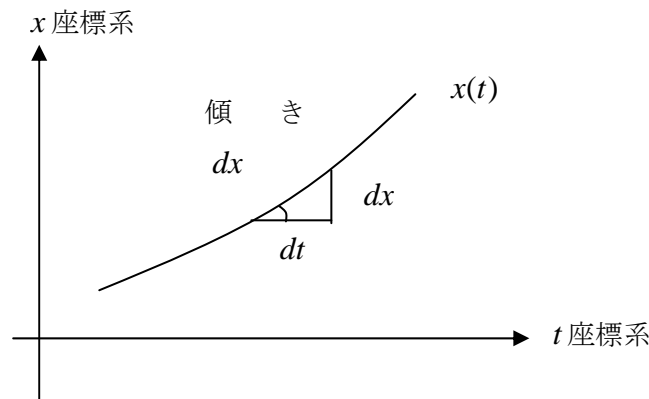
1次元の積分

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad (\text{A-1})$$

において、 x 座標系を t 座標系に変換すると、

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x(t)) \frac{dx}{dt} dt \quad (\text{A-2})$$

x 座標の増分 dx と t 座標の増分 dt との間には、次の図から、 $dx = \frac{dx}{dt} dt$ の関係があることが分かる。



2次元の積分

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dx dy \quad (\text{A-3})$$

において、 (x, y) 座標系を (r, s) 座標系に変換すると、

$$\int_{r_1}^{r_2} \int_{s_1}^{s_2} f(x(r, s), y(r, s)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)} dr ds \quad (\text{A-4})$$

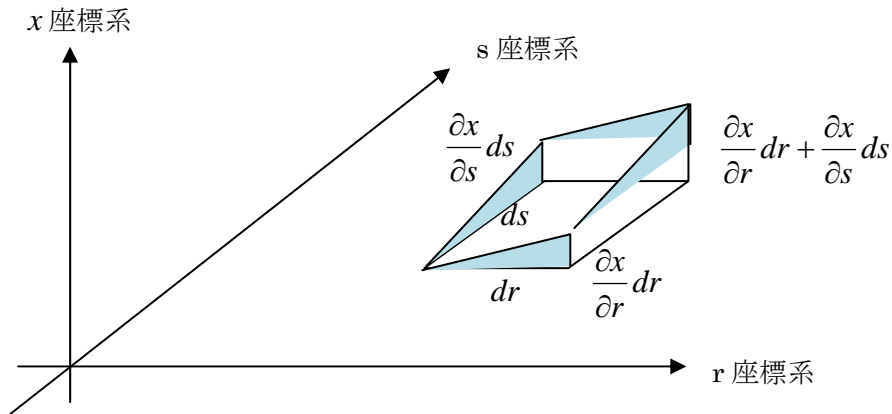
ここに

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)} = \det J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix} \quad (\text{A-5})$$

x 座標の増分 dx と、r 座標および s 座標の増分 dr および ds との間には、次の図から、

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial s} ds = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ ds \end{pmatrix} \quad (\text{A-6})$$

の関係があることが分かる。



同様に、y 座標の増分 dy と、r 座標および s 座標の増分 dr および ds との間には、

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial s} ds = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ ds \end{pmatrix} \quad (\text{A-7})$$

まとめると

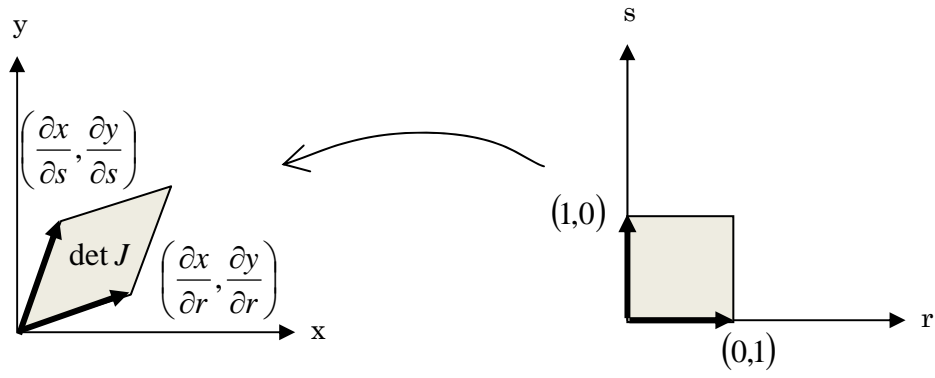
$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ ds \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} dr \\ ds \end{pmatrix} \quad (\text{A-8})$$

この変換から、(r,s)座標系の面積 1 のベクトル $(0,1), (1,0)$ は、(x,y)座標系の

$$\left(\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r} \right), \left(\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s} \right) \text{ に変換されて、その面積は } \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix} = \det J \text{ となることが分かる。}$$

つまり、(r,s)座標系の微小面積 $drds$ の $\det J$ 倍が(x,y)座標系の微小面積 $dxdy$ になる。

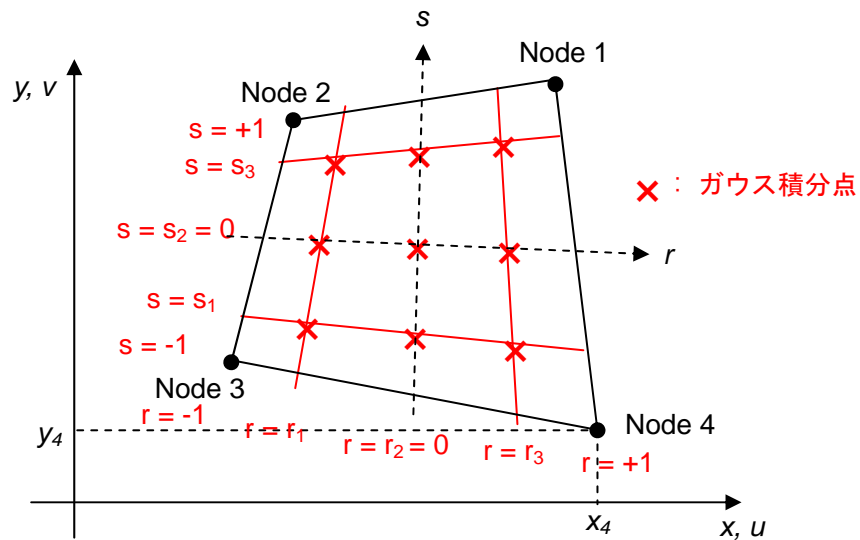
$$dxdy = (\det J)drds = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)} drds \quad (\text{A-9})$$



12. ガウス積分点の主応力

1) ガウス積分点の応力と歪

サンプリング点が3のガウス求積法を用いる場合には、2次元要素の中に9点のガウス積分点 (r_i, s_j) ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$) が存在する。



ガウス積分点 (r_i, s_j) の応力と歪は、(11-5) 式および (11-7) 式より

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}_{ij} = DB_{ij}U \quad (12-1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}_{ij} = B_{ij}U \quad (12-2)$$

2) ガウス積分点の主応力

ガウス積分点の応力 $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ は、座標を回転させることで、せん断応力がゼロで垂直応力のみとすることができる。回転後の座標を**主軸**、垂直応力を**主応力**とよぶ。

いま、 (σ, τ) 平面上の 2 点 (σ_x, τ_{xy}) , $(\sigma_y, -\tau_{xy})$ を結ぶ線分を直径とする円を描くと、円が σ 軸と交わる点 $(\sigma_1, 0)$, $(\sigma_2, 0)$ は主応力となり、線分と σ 軸とがなす角度は主軸の回転角の 2 倍となる。この円を「モールの応力円」という。

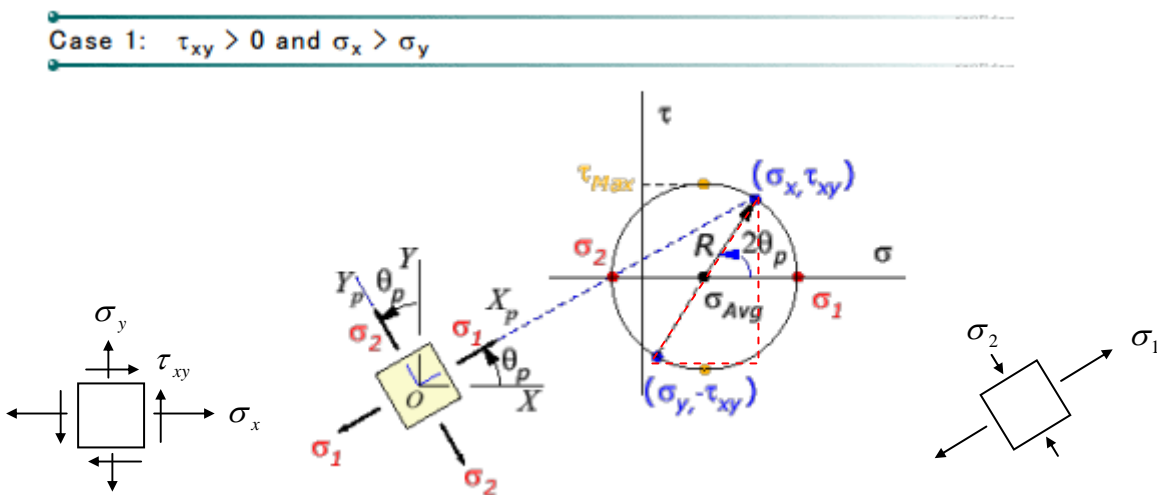
数式で書くと

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (12-3)$$

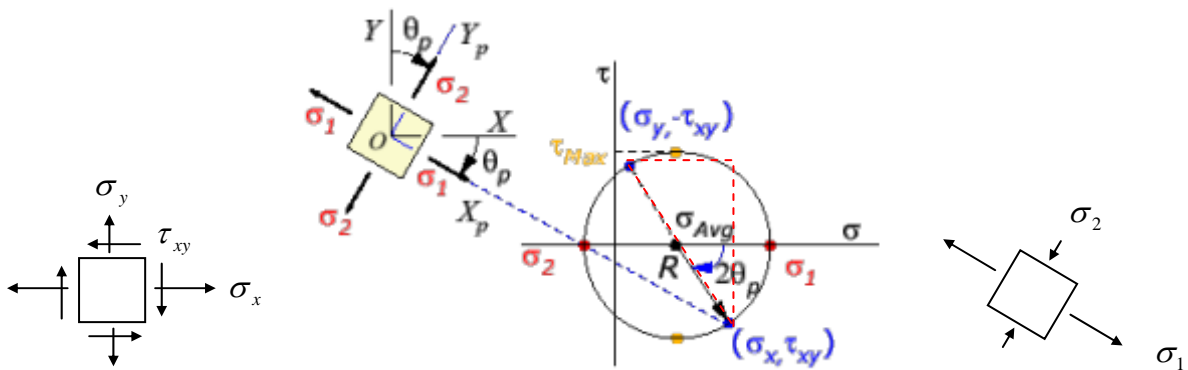
$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (12-4)$$

$$\theta_p = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) \quad (12-5)$$

応力の符号に応じて、主応力の向きは以下のようになる。

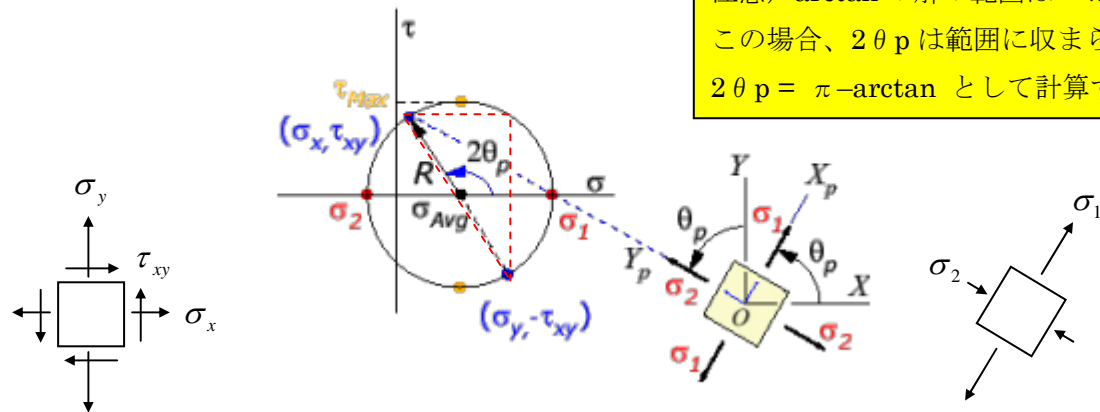


Case 2: $\tau_{xy} < 0$ and $\sigma_x > \sigma_y$



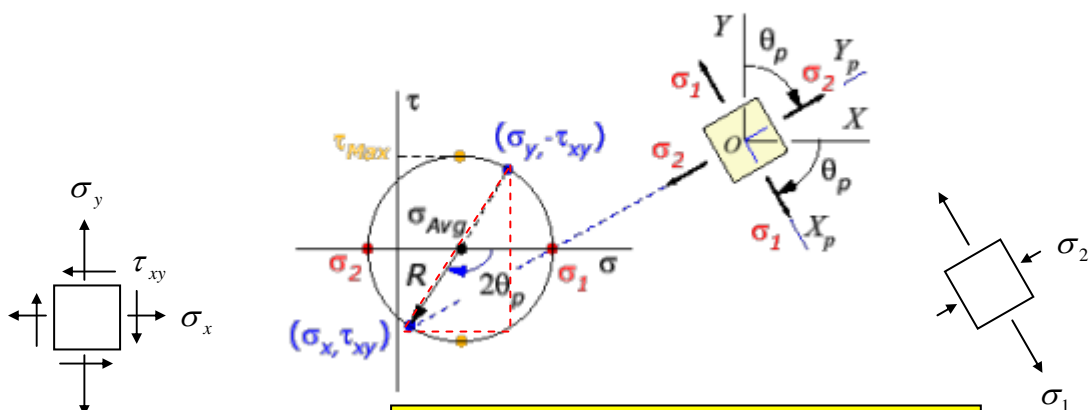
注意) \arctan の解の範囲は $-\pi/2 \sim \pi/2$ この場合、 $2\theta_p$ は範囲に収まっている。

Case 3: $\tau_{xy} > 0$ and $\sigma_x < \sigma_y$



注意) \arctan の解の範囲は $-\pi/2 \sim -\pi/2$
 この場合、 $2\theta_p$ は範囲に収まらない。
 $2\theta_p = \pi - \arctan$ として計算する。

Case 4: $\tau_{xy} < 0$ and $\sigma_x < \sigma_y$



注意) \arctan の解の範囲は $-\pi/2 \sim -\pi/2$
 この場合、 $2\theta_p$ は範囲に収まらない。
 $2\theta_p = \arctan - \pi$ として計算する。

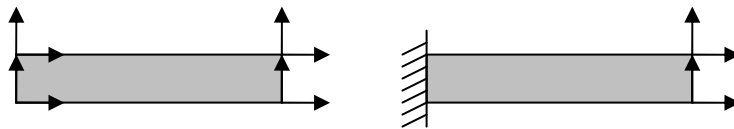
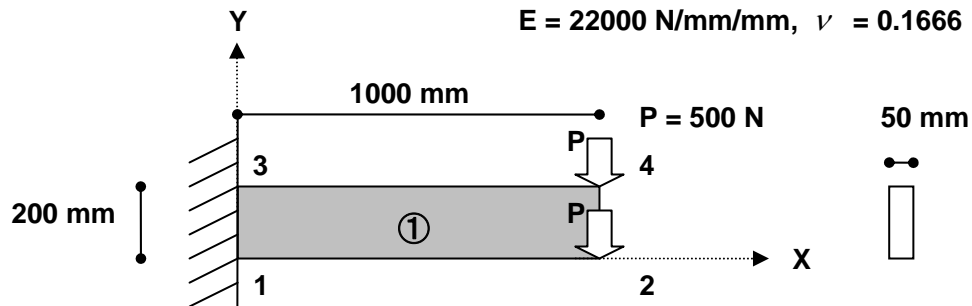
3) ガウス積分点の座標

ガウス積分点の座標は、節点変位から(11-2)式を用いて求めることができる。

$$\begin{aligned}u(r_i, s_j) &= \sum_{i=1}^4 h_i(r_i, s_j) u_i \\v(r_i, s_j) &= \sum_{i=1}^4 h_i(r_i, s_j) v_i\end{aligned}\tag{12-6}$$

13. 全体マトリクスの構成

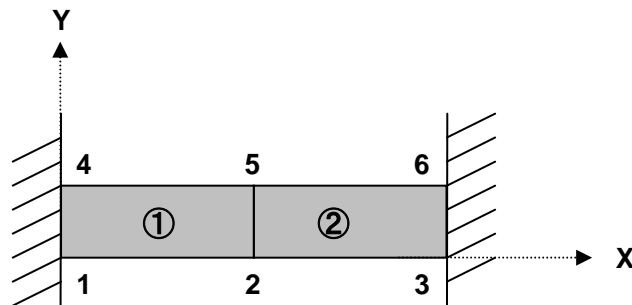
1) 自由度ベクトル (Freedom Vector)



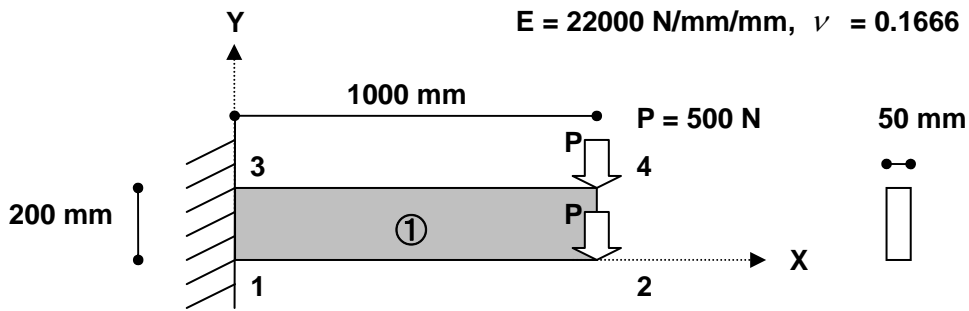
	初期値	拘束自由度を 1	1 を 0 に 0 を番号付
$\{F\} =$	$1_x \quad 0$	1	0
	$1_y \quad 0$	1	0
	$2_x \quad 0$	0	1
	$2_y \quad 0$	0	2
	$3_x \quad 0$	1	0
	$3_y \quad 0$	1	0
	$4_x \quad 0$	0	3
	$4_y \quad 0$	0	4

例題 1)

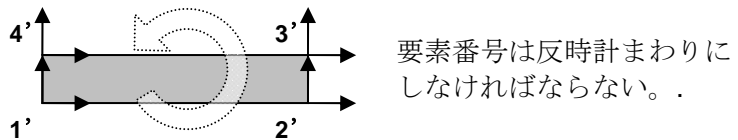
2つの要素からなる次の構造物の自由度ベクトルを求めよ。



2) 位置マトリクス (Location Matrix)



① 要素剛性マトリクス

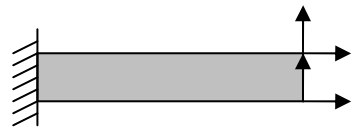


	$1'_x$	$1'_y$	$2'_x$	$2'_y$	$3'_x$	$3'_y$	$4'_x$	$4'_y$	
$P1'$	K11	K12	K13	K14	K15	K16	K17	K18	$U1'$
$Q1'$	K21	K22	K23	K24	K25	K26	K27	K28	$V1'$
$P2'$	K31	K32	K33	K34	K35	K36	K37	K38	$U2'$
$Q2'$	K41	K42	K43	K44	K45	K46	K47	K48	$V2'$
$P3'$	K51	K52	K53	K54	K55	K56	K57	K58	$U3'$
$Q3'$	K61	K62	K63	K64	K65	K66	K67	K68	$V3'$
$P4'$	K71	K72	K73	K74	K75	K76	K77	K78	$U4'$
$Q4'$	K81	K82	K83	K84	K85	K86	K87	K88	$V4'$

位置
マトリクス

0
0
1
2
3
4
0
0

② 全体剛性マトリクス

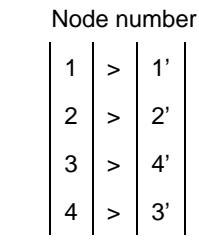


	$U2'$	$V2'$	$U3'$	$V3'$	
$P2'$	K33	K34	K35	K36	$U2'$
$Q2'$	K43	K44	K45	K46	$V2'$
$P3'$	K53	K54	K55	K56	$U3'$
$Q3'$	K63	K64	K65	K66	$V3'$



自由度ベクトル

$$\{F\} = \begin{array}{c|c} 1_x & 0 \\ 1_y & 0 \\ \hline 2_x & 1 \\ 2_y & 2 \\ \hline 3_x & 0 \\ 3_y & 0 \\ \hline 4_x & 3 \\ 4_y & 4 \end{array}$$

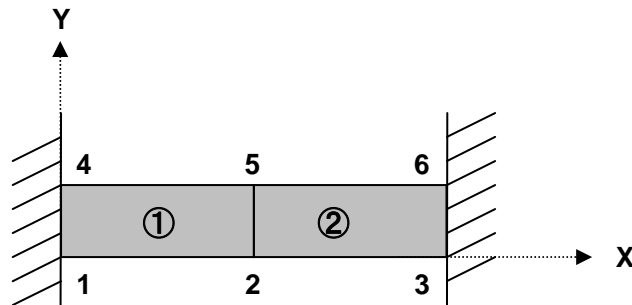


位置マトリクス

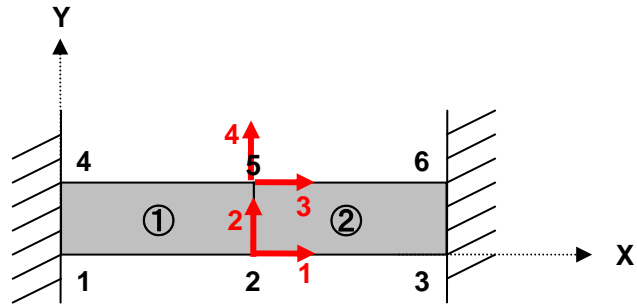
$$\begin{array}{c|c} 1'_x & 0 \\ 1'_y & 0 \\ \hline 2'_x & 1 \\ 2'_y & 2 \\ \hline 3'_x & 3 \\ 3'_y & 4 \\ \hline 4'_x & 0 \\ 4'_y & 0 \end{array}$$

例題 2)

次の構造物の要素②の位置マトリクスを求めよ。



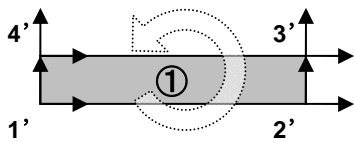
例題 1), 2)の解答



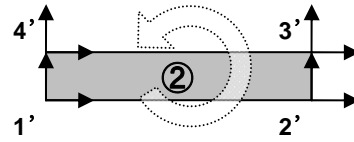
1) 自由度ベクトル

	Initial	Restrained freedom = 1	Numbering
$\{F\} =$	$1_x \quad 0$	1	0
	$1_y \quad 0$	1	0
	$2_x \quad 0$	0	1
	$2_y \quad 0$	0	2
	$3_x \quad 0$	1	0
	$3_y \quad 0$	1	0
	$4_x \quad 0$	1	0
	$4_y \quad 0$	1	0
	$5_x \quad 0$	0	3
	$5_y \quad 0$	0	4
	$6_x \quad 0$	1	0
	$6_y \quad 0$	1	0

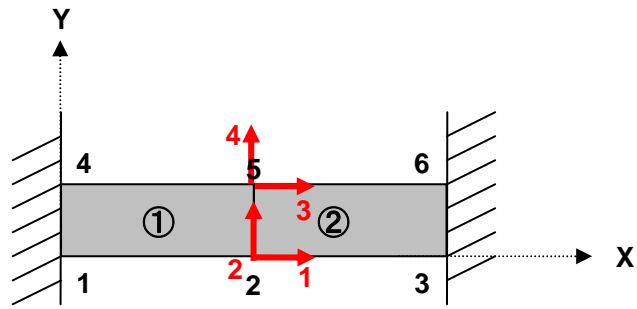
2) 位置マトリクス



$1'_x$	0
$1'_y$	0
$2'_x$	1
$2'_y$	2
$3'_x$	3
$3'_y$	4
$4'_x$	0
$4'_y$	0



$1'_x$	1
$1'_y$	2
$2'_x$	0
$2'_y$	0
$3'_x$	0
$3'_y$	0
$4'_x$	3
$4'_y$	4

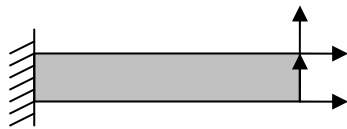


要素①の要素剛性マトリクスのおね合わせ

	$1'_x$	$1'_y$	$2'_x$	$2'_y$	$3'_x$	$3'_y$	$4'_x$	$4'_y$	
P1'	K11	K12	K13	K14	K15	K16	K17	K18	U1'
Q1'	K21	K22	K23	K24	K25	K26	K27	K28	V1'
P2'	K31	K32	K33	K34	K35	K36	K37	K38	U2'
Q2'	K41	K42	K43	K44	K45	K46	K47	K48	V2'
P3'	K51	K52	K53	K54	K55	K56	K57	K58	U3'
Q3'	K61	K62	K63	K64	K65	K66	K67	K68	V3'
P4'	K71	K72	K73	K74	K75	K76	K77	K78	U4'
Q4'	K81	K82	K83	K84	K85	K86	K87	K88	V4'

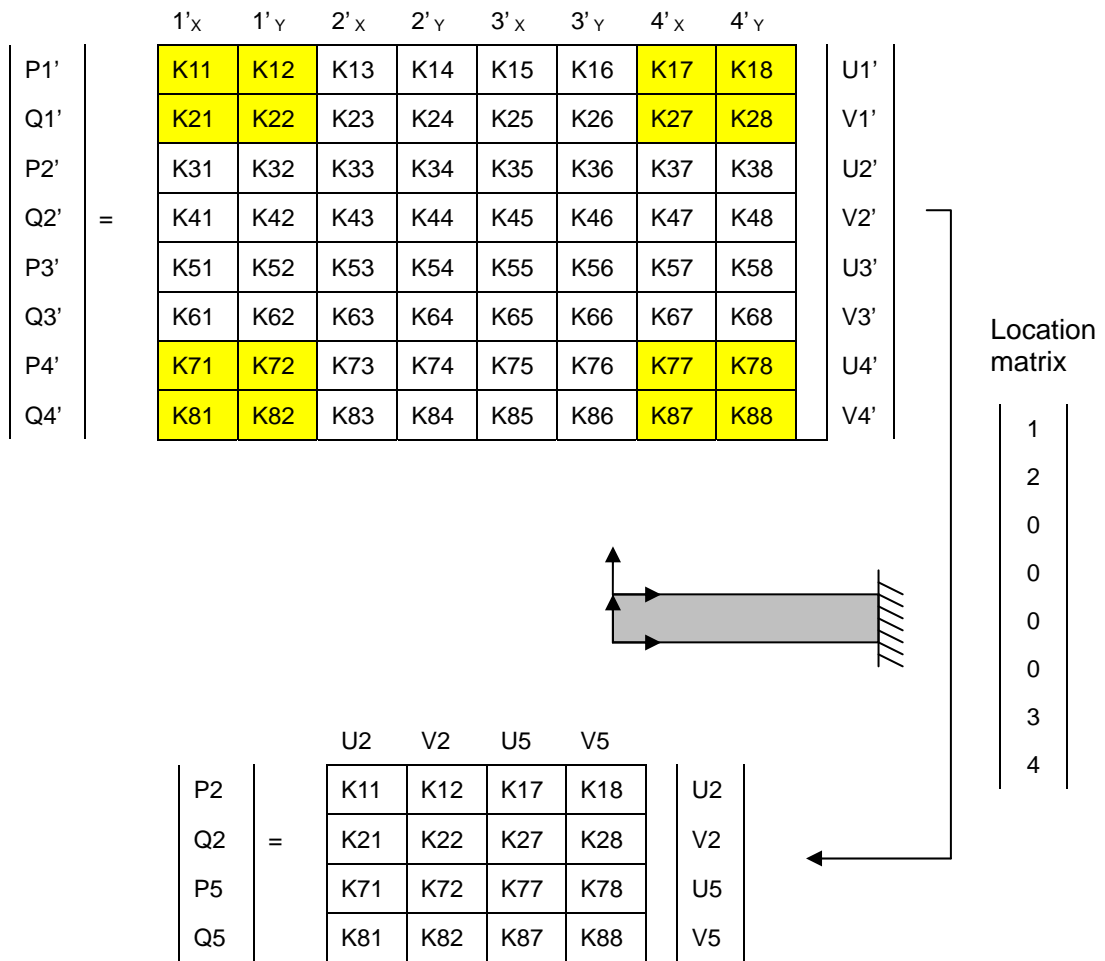
Location matrix

0
0
1
2
3
4
0
0



	U2	V2	U5	V5	
P2	K33	K34	K35	K36	U2
Q2	K43	K44	K45	K46	V2
P5	K53	K54	K55	K56	U5
Q5	K63	K64	K65	K66	V5

要素②の要素剛性マトリクスの重ね合わせ

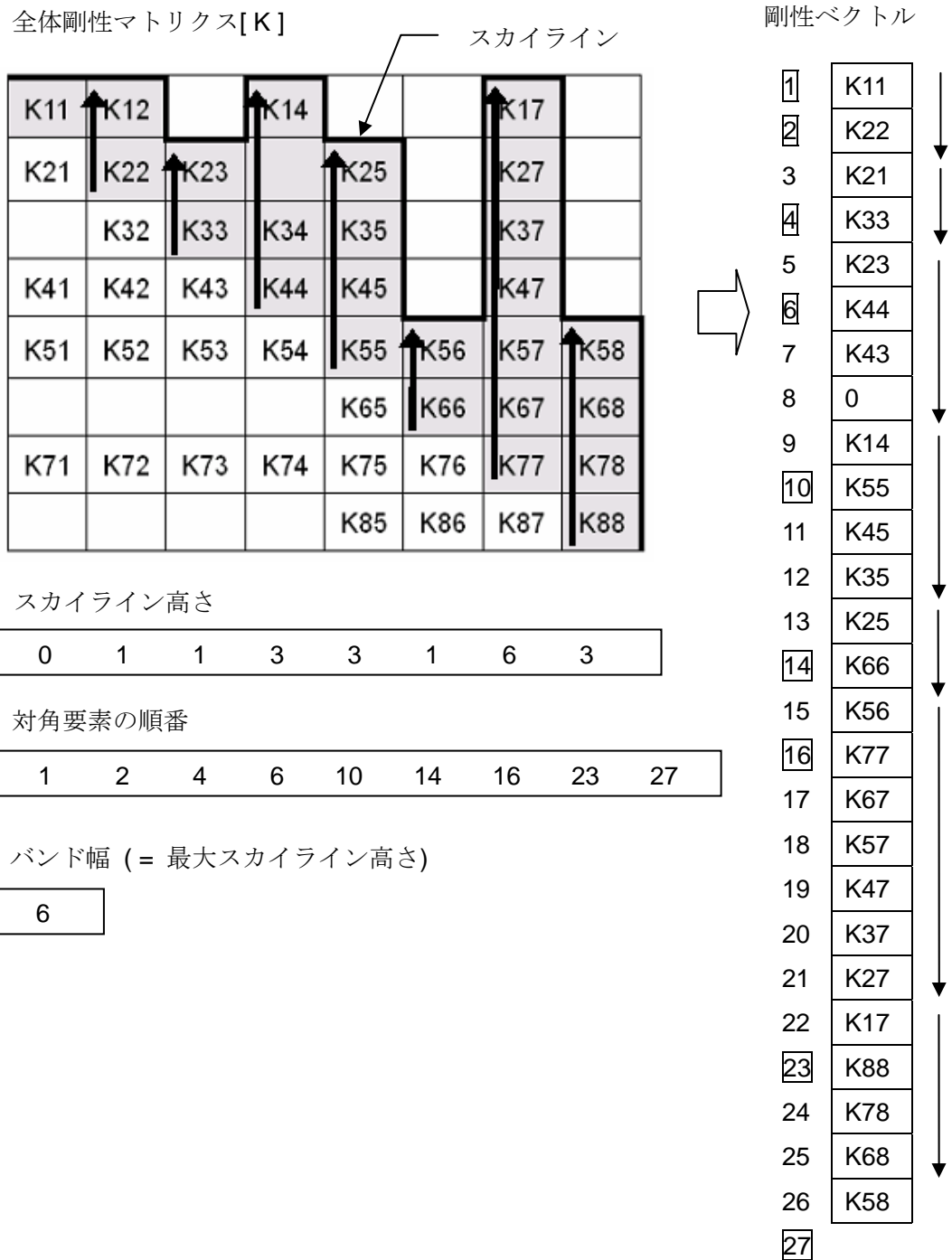


これより全体剛性マトリクスは、

		U2	V2	U5	V5	
P2	=	$K33^1 + K11^2$	$K34^1 + K12^2$	$K35^1 + K17^2$	$K36^1 + K18^2$	U2
Q2		$K43^1 + K21^2$	$K44^1 + K22^2$	$K45^1 + K27^2$	$K46^1 + K28^2$	V2
P5		$K53^1 + K71^2$	$K54^1 + K72^2$	$K55^1 + K77^2$	$K56^1 + K78^2$	U5
Q5		$K63^1 + K81^2$	$K64^1 + K82^2$	$K65^1 + K87^2$	$K66^1 + K88^2$	V5

14. スカイライン法

一般的に、全体剛性マトリクス[K]は、対称行列で、かつ疎行列（スパース行列ともいい、成分のほとんどがゼロの行列）である。そこで、対角成分でかつ非ゼロとなる部分（スカイライン）より下のみを1次元のベクトルに格納することで、計算機の記憶容量を減らし、連立方程式の計算時間を減らすことができる。



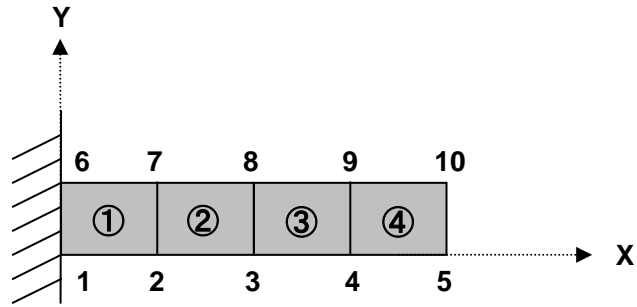
例題 3)

例題 1)と同じ構造物について、節点番号の振り方を変えた以下の2ケースについて、

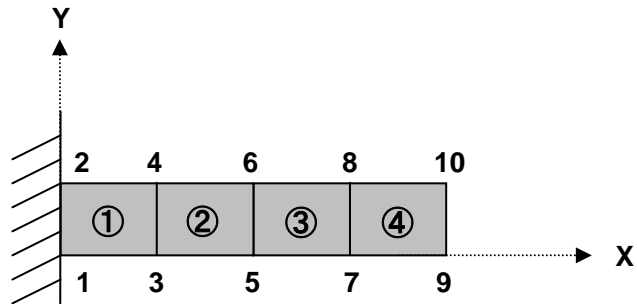
- 1) スカイライン高さ
- 2) 対角要素の順番
- 3) バンド幅

を比較せよ

Case 1

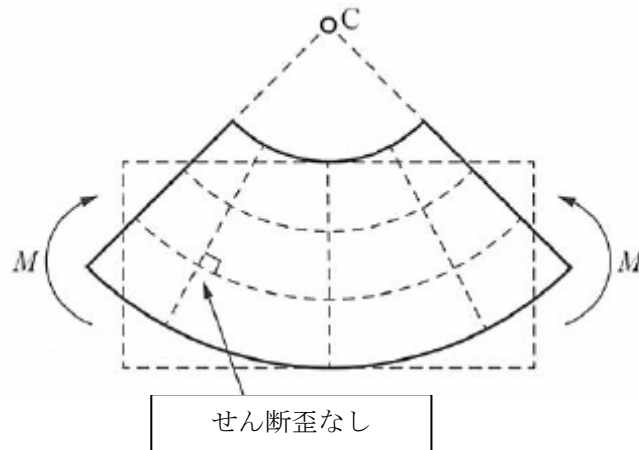


Case 2

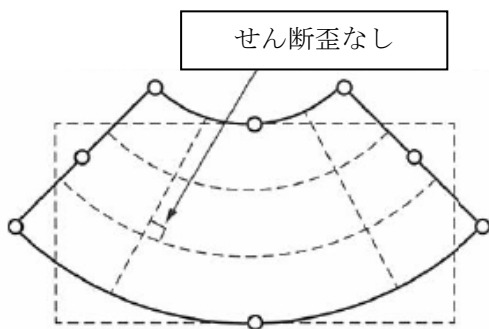


15. 非適合要素

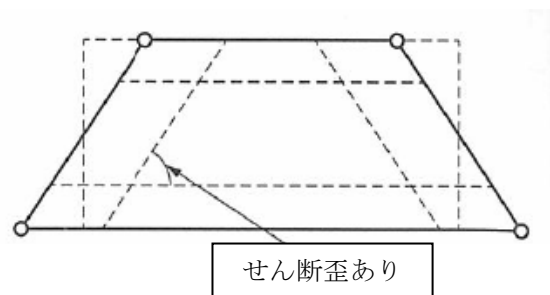
理想的な状況において、純曲げを受ける梁の変形は曲線状になる。このとき、下図の点線で示される曲線状の横軸と縦軸の直線との角度は、変形後も 90 度を保持するため、材料にはせん断歪が生じない。



8 節点からなる 2 次要素を用いれば、曲線状の変形を表すことができる。一方、4 節点からなる 1 次要素では、曲線状の変形を表すことができないため、横軸の点線は直線となり縦軸との角度は 90 度にはならない。そのため、誤ったせん断歪とせん断応力が導入されてしまい、要素の歪エネルギーは理想的な要素に比べて増加し、仮想仕事の原理から、結果として剛性マトリクスを過大評価することになる。このことが、4 節点 1 次要素を使った有限要素解析では曲げに対する剛性が過大に評価される（つまり曲げ変形が小さくなる）問題を生じさせる。この問題は“せん断ロック”と呼ばれる。



(a) 8 節点 2 次要素

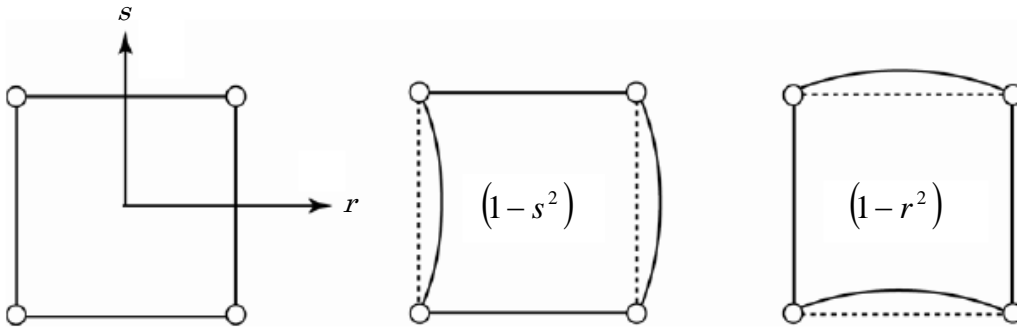


(b) 4 節点 1 次要素

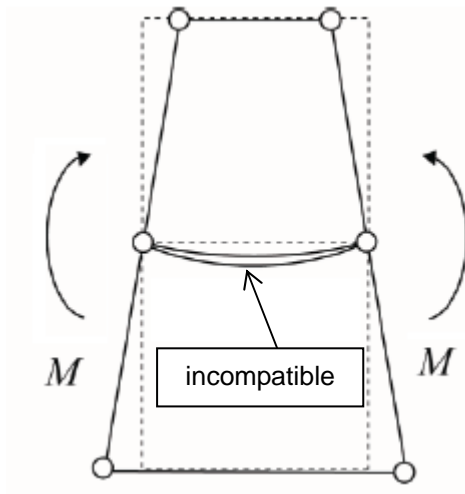
この問題を解決する方法として、曲線の変形モードを追加した新しい形状関数を導入する。

$$u(r, s) = \sum_{i=1}^4 h_i(r, s) u_i + (1-r^2)\alpha_1 + (1-s^2)\alpha_2 \quad (15-1)$$

$$v(r, s) = \sum_{i=1}^4 h_i(r, s) v_i + (1-r^2)\alpha_3 + (1-s^2)\alpha_4$$



これにより曲げ剛性の過大評価が避けられるが、2つの要素の形状関数が一致しない場合には、要素境界において変形の非適合が発生する。そのため、この要素は“非適合要素”と呼ばれる。



(15-1) 式はマトリクスを使って、

$$u(r, s) = H(r, s) U + G(r, s) A \quad (15-2)$$

ここに

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_1 & g_2 \end{bmatrix},$$

$$g_1 = (1-r^2), \quad g_2 = (1-s^2)$$

$$U^T = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4], \quad A^T = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4]$$

剛性マトリクスは、次式の「仮想仕事法の原理」から求めることができる。

$$\int_V \bar{\varepsilon}^T \sigma \, dv = \bar{U}^T F \quad (15-3)$$

ここに、 $\bar{\varepsilon}$ は仮想歪ベクトル、 σ は応力、 \bar{U} は節点の仮想変位ベクトル、 F は外力ベクトルである。

歪ベクトルは次式で定義される。

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial x} u_i + \frac{\partial g_1}{\partial x} \alpha_1 + \frac{\partial g_2}{\partial x} \alpha_2 \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial y} v_i + \frac{\partial g_1}{\partial y} \alpha_3 + \frac{\partial g_2}{\partial y} \alpha_4 \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial y} u_i + \frac{\partial g_1}{\partial y} \alpha_1 + \frac{\partial g_2}{\partial y} \alpha_2 + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial x} v_i + \frac{\partial g_1}{\partial x} \alpha_3 + \frac{\partial g_2}{\partial x} \alpha_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial y} \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial y} & \frac{\partial h_3}{\partial x} & \frac{\partial h_4}{\partial y} & \frac{\partial h_4}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \\ \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = \quad \mathbf{B} \mathbf{U} \quad + \quad \mathbf{G} \mathbf{A} \quad (15-4)$$

平面問題における、応力・歪関係は次式で表される。

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (15-5)$$

$$\sigma = \quad \mathbf{D} \quad \varepsilon$$

(15-4) 式を(15-5) 式に代入すると、

$$\sigma = \mathbf{D} (\mathbf{B} \mathbf{U} + \mathbf{G} \mathbf{A}) \quad (15-6)$$

よって、仮想仕事の原理から

$$\begin{aligned}
 & \int_V (B\bar{U} + G\bar{A})^T D(BU + GA) dv \\
 &= \bar{U}^T \left(\int_V B^T DB dv \right) U + \bar{U}^T \left(\int_V B^T DG dv \right) A + \bar{A}^T \left(\int_V G^T DB dv \right) U + \bar{A}^T \left(\int_V G^T DG dv \right) A \\
 &= \bar{U}^T F
 \end{aligned} \tag{15-7}$$

マトリクスで書くと

$$\begin{bmatrix} \bar{U}^T & \bar{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_V B^T DB dv & \int_V B^T DG dv \\ \int_V G^T DB dv & \int_V G^T DG dv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{U}^T & \bar{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

これより、剛性方程式が次式のように得られる。

$$\begin{bmatrix} K_{UU} & K_{UA} \\ K_{AU} & K_{AA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \tag{15-8}$$

ここに

$$\begin{aligned}
 K_{UU} &= \int_V B^T DB dv, & K_{UA} &= \int_V B^T DG dv \\
 K_{AU} &= \int_V G^T DB dv, & K_{AA} &= \int_V G^T DG dv
 \end{aligned}$$

第2式から、非適合変形を消去すると

$$\begin{aligned}
 K_{AU}U + K_{AA}A &= 0 \\
 A &= -K_{AA}^{-1}K_{AU}U
 \end{aligned} \tag{15-9}$$

従って、要素剛性マトリクスは、最終的に以下のように求められる。

$$\begin{aligned}
 F &= KU \\
 K &= K_{UU} - K_{UA}K_{AA}^{-1}K_{AU}
 \end{aligned} \tag{15-10}$$

1) ヤコブ行列の評価

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial r} x_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial r} y_i \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial s} x_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial s} y_i \end{pmatrix} \quad (15-11)$$

2) G マトリクスの評価

(15-4)式より

$$G = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \\ \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (15-12)$$

補間関数の偏微分 $\frac{\partial g_1}{\partial x}, \frac{\partial g_2}{\partial x}, \frac{\partial g_1}{\partial y}, \frac{\partial g_2}{\partial y}$ は

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial x} &= \frac{\partial g_1}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x}, & \frac{\partial g_2}{\partial x} &= \frac{\partial g_2}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x}, \\ \frac{\partial g_1}{\partial y} &= \frac{\partial g_1}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial g_1}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y}, & \frac{\partial g_2}{\partial y} &= \frac{\partial g_2}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial g_2}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} \end{aligned}$$

マトリクスで書くと

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial x} \\ \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r} & \frac{\partial g_2}{\partial r} \\ \frac{\partial g_1}{\partial s} & \frac{\partial g_2}{\partial s} \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r} & \frac{\partial g_2}{\partial r} \\ \frac{\partial g_1}{\partial s} & \frac{\partial g_2}{\partial s} \end{pmatrix} \quad (15-13)$$

3) 補間関数の偏微分

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial r} &= -2r & \frac{\partial g_1}{\partial s} &= 0 \\ \frac{\partial g_2}{\partial r} &= 0 & \frac{\partial g_2}{\partial s} &= -2s \end{aligned}, \quad (15-14)$$

4) 数値積分の評価

ガウスの求積法より、積分はガウス積分点の値を用いた有限和によって評価される。

$$\begin{aligned}
 K_{UU} &= t \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 w_i w_j F_{UU}(r_i, s_j) \\
 K_{UA} &= t \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 w_i w_j F_{UA}(r_i, s_j) \\
 K_{AU} &= t \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 w_i w_j F_{AU}(r_i, s_j) \\
 K_{AA} &= t \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 w_i w_j F_{AA}(r_i, s_j)
 \end{aligned} \tag{15-15}$$

ここに

$$\begin{aligned}
 F_{UU}(r, s) &= B(x(r, s), y(r, s))^T DB(x(r, s), y(r, s)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)} \\
 F_{UA}(r, s) &= B(x(r, s), y(r, s))^T DG(x(r, s), y(r, s)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)} \\
 F_{AU}(r, s) &= G(x(r, s), y(r, s))^T DB(x(r, s), y(r, s)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)} \\
 F_{AA}(r, s) &= G(x(r, s), y(r, s))^T DG(x(r, s), y(r, s)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)} \\
 w_1 &= 5/9 = 0.5556, \quad w_2 = 8/9 = 0.8889, \quad w_3 = 5/9 = 0.5556 \\
 r_1 = s_1 &= -\sqrt{3/5} = -0.7746, \quad r_2 = s_2 = 0, \quad r_3 = s_3 = \sqrt{3/5} = 0.7746
 \end{aligned}$$

これより、要素剛性マトリクスは

$$\begin{aligned}
 F &= KU \\
 K &= K_{UU} - K_{UA} K_{AA}^{-1} K_{AU}
 \end{aligned} \tag{15-16}$$

5) ガウス積分点の応力と歪

ガウス積分点の歪は(15-4)式および (15-9)式より

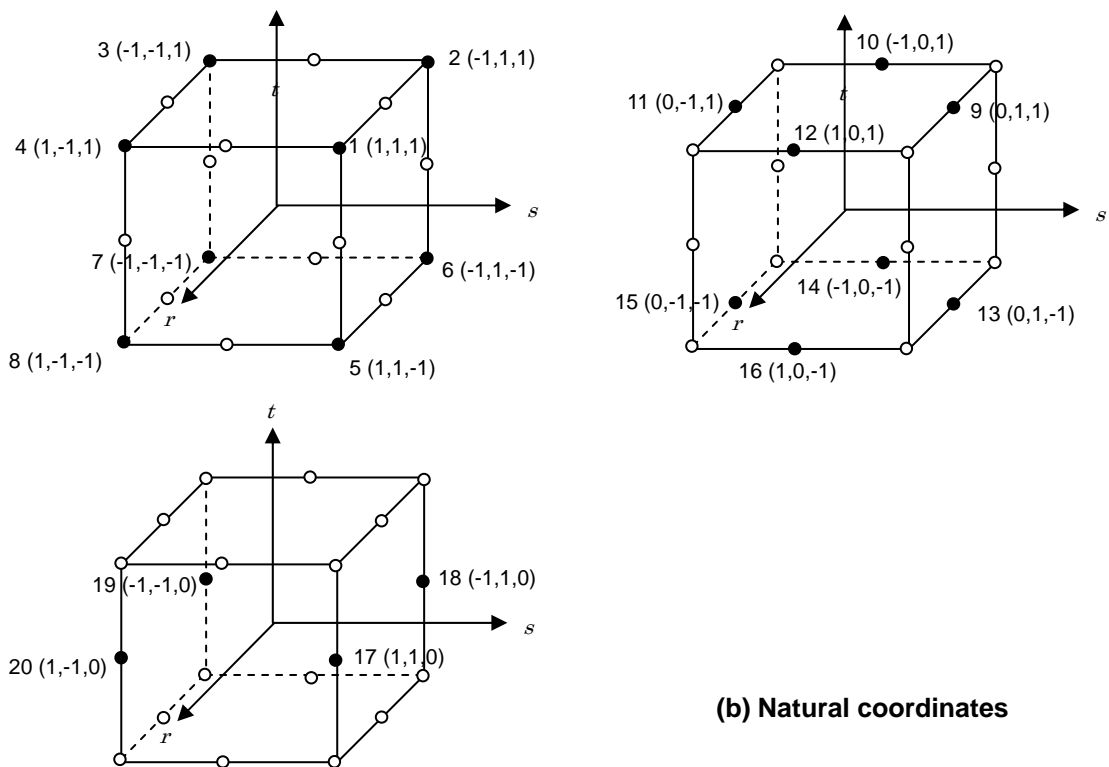
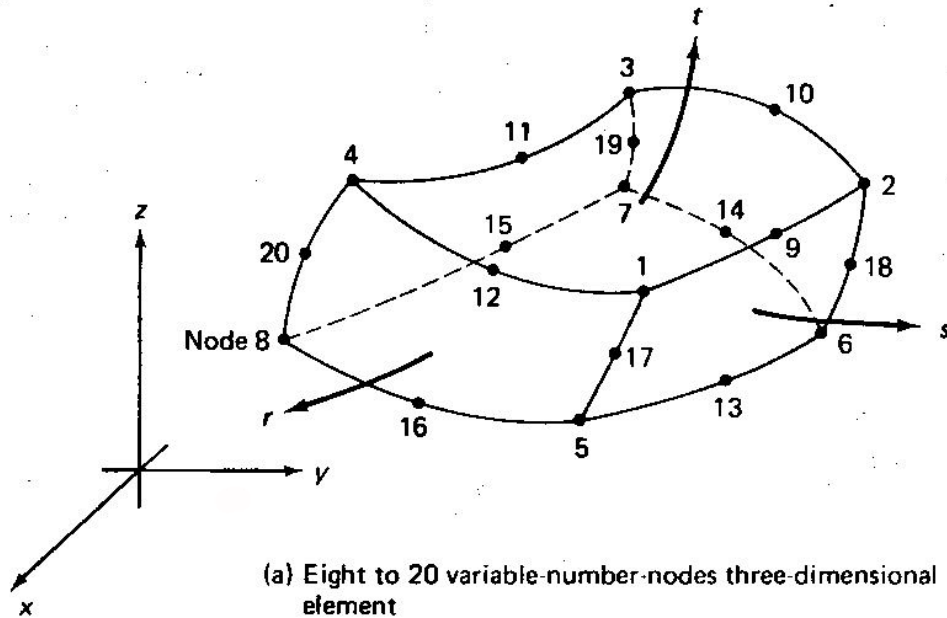
$$\varepsilon = BU + GA = (B - GK_{AA}^{-1} K_{AU})U \tag{15-17}$$

ガウス積分点の応力は

$$\sigma = D\varepsilon = (DB - DGK_{AA}^{-1} K_{AU})U \tag{15-18}$$

16. 六面体要素

六面体要素は、3次元の物質のモデル化で広く使われており、8つの頂点と12の辺および6つの面からなる。自然座標系 (r, s, t) を導入することでガウスの積分公式を用いることができる。



節点の番号付けは、ヤコビアン行列が正值となる条件を満足するように、以下のように定める。

- 1) 番号1の頂点と面を選ぶ。
- 2) 面の他の頂点を時計周りに番号(2,3,4,...)をふる。
- 3) 反対の面の節点を、たとえば1,2,3,4に対して5,6,7,8と対になるように番号をふる。
- 4) 辺の中間点を頂点と同じ要領で番号をふる。

補間関数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 h_i(r, s, t) = & \frac{1}{8} r_i^2 s_i^2 t_i^2 (1 + r_i r)(1 + s_i s)(1 + t_i t)(r_i r + s_i s + t_i t - 2) \\
 & + \frac{1}{4} (1 - r_i^2)(1 + s_i s)(1 + t_i t)(1 - r^2) \\
 & + \frac{1}{4} (1 - s_i^2)(1 + t_i t)(1 + r_i r)(1 - s^2) \\
 & + \frac{1}{4} (1 - t_i^2)(1 + r_i r)(1 + s_i s)(1 - t^2)
 \end{aligned} \tag{16-1}$$

ここに、

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
r _i	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	1	-1	-1	1
s _i	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	1	-1	-1
t _i	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0

(16-2)

補間関数の偏微分は、

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h_i(r, s, t)}{\partial r} = & \frac{1}{8} r_i^2 s_i^2 t_i^2 r_i (2r_i r + s_i s + t_i t - 1)(1 + s_i s)(1 + t_i t) \\
 & - \frac{1}{2} (1 - r_i^2)(1 + s_i s)(1 + t_i t)r + \frac{1}{4} r_i (1 - s_i^2)(1 + t_i t)(1 - s^2) + \frac{1}{4} r_i (1 - t_i^2)(1 + s_i s)(1 - t^2) \\
 \frac{\partial h_i(r, s, t)}{\partial s} = & \frac{1}{8} r_i^2 s_i^2 t_i^2 s_i (r_i r + 2s_i s + t_i t - 1)(1 + r_i r)(1 + t_i t) \\
 & + \frac{1}{4} s_i (1 - r_i^2)(1 + t_i t)(1 - r^2) - \frac{1}{2} (1 - s_i^2)(1 + t_i t)(1 + r_i r)s + \frac{1}{4} s_i (1 - t_i^2)(1 + r_i r)(1 - t^2) \\
 \frac{\partial h_i(r, s, t)}{\partial t} = & \frac{1}{8} r_i^2 s_i^2 t_i^2 r_i (r_i r + s_i s + 2t_i t - 1)(1 + r_i r)(1 + s_i s) \\
 & + \frac{1}{4} t_i (1 - r_i^2)(1 + s_i s)(1 - r^2) + \frac{1}{4} t_i (1 - s_i^2)(1 + r_i r)(1 - s^2) - \frac{1}{2} t_i (1 - t_i^2)(1 + r_i r)(1 + s_i s)t
 \end{aligned}$$

(16-3)

座標 (x, y, z) から (r, s, t) への変換は、補間関数を用いて以下のように表される。

$$\begin{aligned} x(r, s, t) &= \sum_{i=1}^{20} h_i(r, s, t) x_i \\ y(r, s, t) &= \sum_{i=1}^{20} h_i(r, s, t) y_i \\ z(r, s, t) &= \sum_{i=1}^{20} h_i(r, s, t) z_i \end{aligned} \quad (16-4)$$

部材の変形 (u, v, w) と節点変形 $(u_1, v_1, w_1, \dots, u_{20}, v_{20}, w_{20})$ の関係も、同じ補間関数を用いて以下のように表される。

$$\begin{aligned} u(r, s, t) &= \sum_{i=1}^{20} h_i(r, s, t) u_i \\ v(r, s, t) &= \sum_{i=1}^{20} h_i(r, s, t) v_i \\ w(r, s, t) &= \sum_{i=1}^{20} h_i(r, s, t) w_i \end{aligned} \quad (16-5)$$

マトリクスで書くと

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & \cdots & h_{20} & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & \cdots & 0 & h_{20} & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & \cdots & 0 & 0 & h_{20} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_{20} \\ v_{20} \\ w_{20} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, \mathbf{s}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}, \mathbf{s}, t) \mathbf{U} \quad (16-6)$$

歪 $\boldsymbol{\varepsilon}$ ベクトルは以下のように定義される。

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial h_i}{\partial x} u_i \\ \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial h_i}{\partial y} v_i \\ \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial h_i}{\partial z} w_i \\ \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial h_i}{\partial y} u_i + \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial h_i}{\partial x} v_i \\ \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial h_i}{\partial z} v_i + \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial h_i}{\partial y} w_i \\ \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial h_i}{\partial x} w_i + \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial h_i}{\partial z} u_i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial h_{20}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial y} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial h_{20}}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial z} & \cdots & 0 & 0 & \frac{\partial h_{20}}{\partial z} \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & \cdots & \frac{\partial h_{20}}{\partial y} & \frac{\partial h_{20}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial z} & \frac{\partial h_1}{\partial y} & \cdots & 0 & \frac{\partial h_{20}}{\partial z} & \frac{\partial h_{20}}{\partial y} \\ \frac{\partial h_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial h_{20}}{\partial z} & 0 & \frac{\partial h_{20}}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_{20} \\ v_{20} \\ w_{20} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{U} \quad (16-7)$$

応力歪関係は、

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}, & \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}, & \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}, & G &= \frac{1}{2(1+\nu)} E \end{aligned} \quad (16-8)$$

マトリクスで書くと

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} \quad (16-9)$$

これより、構成マトリクスは

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = \frac{2G}{1-2\nu} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} \quad (16-10)$$

$\sigma = D \varepsilon$

(16-7)式を(16-10)式に代入すると

$$\sigma = D B U \quad (16-11)$$

仮想仕事の原理を適用して、剛性マトリクスが以下のように求められる。

$$F = K U, \quad K = \int_V B^T D B dv \quad (16-12)$$

この積分は、(x,y,z)座標系で定義されているため、自然座標系(r,s,t)に変換して、積分範囲を(-1,1)にする。

ここで、ヤコブ行列を

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix}; \text{ Jacobian Matrix} \quad (16-13)$$

とすれば、積分は自然座標系で以下のように表される。

$$K = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B(r,s,t)^T DB(r,s,t) \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,s,t)} drdsdt \quad (16-14)$$

ここに

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,s,t)} = \det J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix} \quad (16-15)$$

1) ヤコブ行列の評価

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial h_i}{\partial r} x_i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial h_i}{\partial r} y_i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial h_i}{\partial r} z_i \\ \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial h_i}{\partial s} x_i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial h_i}{\partial s} y_i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial h_i}{\partial s} z_i \\ \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial h_i}{\partial t} x_i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial h_i}{\partial t} y_i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial h_i}{\partial t} z_i \end{pmatrix} \quad (16-16)$$

2) Bマトリクスの評価

(16-7)式より

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial h_{20}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial h_{20}}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial z} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial h_{20}}{\partial z} \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial h_{20}}{\partial y} & \frac{\partial h_{20}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial z} & \frac{\partial h_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial h_{20}}{\partial z} & \frac{\partial h_{201}}{\partial y} \\ \frac{\partial h_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial h_{20}}{\partial z} & 0 & \frac{\partial h_{20}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (16-17)$$

補間関数の偏微分 $\frac{\partial h_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial h_{20}}{\partial x}, \frac{\partial h_1}{\partial y}, \dots, \frac{\partial h_{20}}{\partial y}, \frac{\partial h_1}{\partial z}, \dots, \frac{\partial h_{20}}{\partial z}$ は

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial x} &= \frac{\partial h_1}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x}, \quad \dots, \quad \frac{\partial h_{20}}{\partial x} = \frac{\partial h_{20}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial h_{20}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial h_{20}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x}, \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} &= \frac{\partial h_1}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial h_1}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial h_1}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y}, \quad \dots, \quad \frac{\partial h_{20}}{\partial y} = \frac{\partial h_{20}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial h_{20}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial h_{20}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y}, \\ \frac{\partial h_1}{\partial z} &= \frac{\partial h_1}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial h_1}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial h_1}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial z}, \quad \dots, \quad \frac{\partial h_{20}}{\partial z} = \frac{\partial h_{20}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial h_{20}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial h_{20}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial z} \end{aligned} \quad (16-18)$$

マトリクスで書くと

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial h_{20}}{\partial x} \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} & \dots & \frac{\partial h_{20}}{\partial y} \\ \frac{\partial h_1}{\partial z} & \dots & \frac{\partial h_{20}}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial s}{\partial z} & \frac{\partial t}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial r} & \dots & \frac{\partial h_{20}}{\partial r} \\ \frac{\partial h_1}{\partial s} & \dots & \frac{\partial h_{20}}{\partial s} \\ \frac{\partial h_1}{\partial t} & \dots & \frac{\partial h_{20}}{\partial t} \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial r} & \dots & \frac{\partial h_{20}}{\partial r} \\ \frac{\partial h_1}{\partial s} & \dots & \frac{\partial h_{20}}{\partial s} \\ \frac{\partial h_1}{\partial t} & \dots & \frac{\partial h_{20}}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (16-19)$$

3) ガウス積分点の応力と歪

サンプリング点が 2 のガウス求積法を用いる場合には、要素の中に 8 点のガウス積分点 (r_i, s_j, t_k) ($i=1,2,3, j=1,2,3, k=1,2,3$) が存在する。ガウス積分点 (r_i, s_j, t_k) の応力と歪は、

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix}_{ij} = DB_{ij}U, \quad \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix}_{ij} = B_{ij}U \quad (16-20)$$

4) 数値積分の評価

ガウスの求積法より、積分はガウス積分点の値を用いた有限和によって評価される。

$$\begin{aligned} K &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B(r, s, t)^T DB(r, s, t) \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, s, t)} dr ds dt \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(r, s, t) dr ds dt \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 w_i w_j w_k F(r_i, s_j, t_k) \end{aligned} \quad (16-21)$$

ここに

$$F(r, s, t) = B(r, s, t)^T DB(r, s, t) \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, s, t)}$$

$$w_1 = w_2 = 1.0$$

$$r_1 = s_1 = t_1 = -\sqrt{1/3} = -0.57735, \quad r_2 = s_2 = t_2 = \sqrt{1/3} = 0.57735$$

5) 全体剛性マトリクス

要素剛性マトリクスを重ね合わせて、全体剛性マトリクスを構築する。

$$K = \sum_m K_m \tag{16-22}$$

ここに。 m は要素番号である。